Libros de Cátedra

Curso de métodos de la física matemática

Volumen II - Introducción a la teoría de grupos

Horacio A. Falomir

FACULTAD DE
CIENCIAS EXACTAS







CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

VOLUMEN II

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRUPOS

Horacio A. Falomir

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas





A mi familia,

Agradecimientos

Deseo manifestar mi agradecimiento a estudiantes y colegas que han contribuido con sus preguntas, comentarios y críticas a mejorar la exposición de los temas aquí tratados y adecuarla al nivel y objetivos de este curso, así como a todos aquellos que han alentado el desarrollo de las Notas del Curso de Métodos de la Física Matemática, que fueran origen de estos dos volúmenes.

También reconocer el insustituible apoyo que he recibido de la Universidad Nacional de La Plata y del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina (CONICET) para el desarrollo de mi actividad, en particular, para la concreción de este proyecto.

Finalmente, agradecer el aliento y apoyo recibido de mi familia y amigos durante la redacción de este texto.

PREFACIO

Los dos volúmenes de este Curso de Métodos de la Física Matemática cubren los contenidos del curso homónimo destinado a estudiantes de las Licenciaturas en Física de la Facultad de Ciencias Exactas y en Ciencias Astronómicas de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la Universidad Nacional de La Plata. Se trata de una asignatura cuatrimestral optativa a la que esos estudiantes pueden tener acceso a partir del segundo cuatrimestre del tercer año de esas carreras, una vez que hayan tomado cursos de Algebra Lineal y de Ecuaciones Diferenciales (además de los básicos, variable compleja incluida).

Este texto está basado en las Notas del Curso de Métodos de la Física Matemática, resultado de varios años de dictado de esa asignatura durante los cuales se han ido adecuando los contenidos y el nivel de la exposición a las posibilidades que ofrece una asignatura cuatrimestral de estas características y en esa etapa de las mencionadas carreras. De ese modo, esas Notas fueron redactadas con el objeto de introducir al estudiante en el manejo de conceptos y métodos que hoy resultan básicos en la Física Matemática y sus aplicaciones a la Mecánica Cuántica, las Teorías de las Interacciones Fundamentales y la Materia Condensada.

Las temáticas que cubre este curso suelen ser expuestas en la numerosa bibliografía disponible (en general, en idioma inglés) de una manera excesivamente abstracta o extensa para las necesidades y objetivos del mismo. Por el contrario, estos dos volúmenes han sido escritos buscando introducir los conceptos de forma clara y natural, con un lenguaje adecuado al nivel de carreras de grado, procurando facilitar la presentación y afianzamiento de los conocimientos mediante una ejemplificación convenientemente seleccionada. Así, se ha buscado mantener el rigor matemático en la presentación pero procurando el desarrollo de la necesaria intuición sobre cada tema.

En ese sentido, se han evitado las complicaciones de una exposición excesivamente formal o abstracta y, sin perder de vista la necesaria generalidad, se ha buscado poner el acento en aquellas situaciones concretas que reflejan los conceptos de manera más transparente y donde el cálculo directo puede resultar más instructivo.

Así es como, en el primer volumen, las propiedades de los espacios de Hilbert son presentadas sin recurrir a la teoría de la medida (lo que excedería las posibilidades del curso), sino mediante una introducción intuitiva del concepto de integral de Lebesgue que, no obstante, resulta suficiente para los propósitos del curso. Las propiedades espectrales de los operadores compactos son derivadas y empleadas para desarrollar los métodos de resolución de ecuaciones integrales y para estudiar las propiedades del operador resolvente. También es analizado el problema de la determinación de las extensiones autoadjuntas de operadores simétricos no acotados, tomando como ejemplo operadores de uso habitual en cursos de Mecánica Cuántica. La transformación de Fourier es estudiada en el espacio de Schawrtz, para luego ser extendida al espacio de funciones de cuadrado integrable con los métodos propios del espacio de Hilbert. Por último, se incluye una introducción a la Teoría de Distribuciones en la que se presenta (con un buen número de ejemplos) desde las definiciones básicas de convergencia, derivada, primitiva y transformación de Fourier, hasta la convolución de distribuciones, con aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales empleando sus soluciones fundamentales o funciones de Green.

El segundo volumen está dedicado a una introducción a la Teoría de Grupos, herramienta esencial de las modernas teorías de la Física. Así es como, después de la presentación de los elementos generales de la teoría, se consideran las propiedades de los grupos de orden finito y sus representaciones, de aplicación, por ejemplo, a la Física Molecular y del Sólido, y el caso de los grupos continuos, de relevancia para la Mecánica Cuántica y la Física de las Interacciones Fundamentales.

El interés en el estudio de las representaciones matriciales de los grupos de simetrías es motivado considerando la ecuación de Schrödinger en un potencial central, para luego referirse más generalmente a los grupos de simetrías de sistemas cuánticos. En la presentación de los grupos de Lie sólo se propone una descripción intuitiva de las variedades diferenciables y sus grupos de homotopía. Las propiedades de las álgebras de Lie son derivadas preferentemente a partir de sus representaciones matriciales, lo que resulta más accesible que presentaciones más abstractas. En particular, el estudio de los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ y de sus representaciones irreducibles se expone con mayor extensión, procurando generar a partir de ellos las ideas básicas que faciliten la introducción de grupos más complicados y de sus propiedades en los cursos posteriores de Partículas y Campos que lo requieran.

La clasificación de Cartan de las álgebras simples y sus representaciones, descritas mediante raíces, pesos y el grupo de Weyl, son presentados de manera muy resumida y más bien a título informativo, dado el limitado tiempo disponible.

Por último, como ejemplo de grupo de Lie no compacto y por su relevancia para la formulación de teorías relativistas, es analizado el grupo de Lorentz y sus representaciones irreducibles, lo que permite su aplicación en cursos de Teoría Cuántica de Campos o Gravitación.

Ambos volúmenes finalizan con un listado de ejercicios propuestos, con los que se busca afianzar y complementar la exposición previa de cada tema.

Cabe consignar que, si bien los contenidos descritos justificarían el dictado de dos cursos separados (uno de Análisis Funcional y otro de Teoría de Grupos), el enfoque que se ha dado a este texto ha permitido que los estudiantes a los que está dirigido accedieran en un cuatrimestre a conocimientos que resultan esenciales para la Física moderna, satisfaciendo necesidades concretas de algunas orientaciones de las Licenciaturas en Física y en Ciencias Astronómicas.

Por otra parte, señalemos que estos volúmenes no pretenden sustituir a los libros que son referencias usuales en estas áreas, de los cuales sólo unos pocos han sido listados en la Bibliografía, sino más bien constituir una introducción para aquellos que requieran un conocimiento más amplio y formal de los temas aquí tratados.

Finalmente, digamos que nuestro enfoque está basado principalmente en la bibliografía señalada al final de cada capítulo.

La Plata, diciembre de 2014. Horacio A. Falomir

Índice general

Capítulo 1

ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE GRUPOS

1.1. Generalidades

Un **grupo** G es un conjunto de elementos sobre los cuales hay definida una ley de composición, $\cdot : G \times G \to G$, que es asociativa, con neutro e inverso, es decir,

a) $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h, \forall\, f, g, h \in G$,
b) $\exists\, e \in G$, llamado **elemento neutro** o **identidad**, que satisface $e \cdot g = g \cdot e = g, \forall\, g \in G$,
c) $\forall\, g \in G, \exists\, g^{-1} \in G$, llamado su **inversa**, que satisface $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

Evidentemente, si $f \cdot g = h \cdot g$ entonces $f = h$. En efecto, $(f \cdot g) \cdot g^{-1} = f \cdot (g \cdot g^{-1}) = (h \cdot g) \cdot g^{-1} = h \cdot (g \cdot g^{-1}) \Rightarrow f = h$.

Similarmente, se puede demostrar que el neutro y el inverso de cualquier elemento son únicos. Por ejemplo, si $g \cdot f = e \Rightarrow g^{-1} \cdot (g \cdot f) = (g^{-1} \cdot g) \cdot f = e \cdot f = g^{-1} \cdot e \Rightarrow f = g^{-1}$. También tenemos que $(f \cdot g)^{-1} = g^{-1} \cdot f^{-1}$, puesto que $(f \cdot g) \cdot (g^{-1} \cdot f^{-1}) = f \cdot (g \cdot g^{-1}) \cdot f^{-1} = f \cdot f^{-1} = e$.

En general, la ley de composición no es conmutativa: $f \cdot g \neq g \cdot f$. Un grupo G para el cual $f \cdot g = g \cdot f, \forall\, f, g \in G$ se dice **Abeliano**[1].

Ejemplo 1.1. Los siguientes son ejemplos de grupos:

- el grupo *aditivo* de los enteros respecto de la operación de suma usual, $\mathbb{Z}$;
- el conjunto de los racionales no nulos, $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, respecto de la operación usual de multiplicación;
- el conjunto $\{1, -1\}$ respecto de la operación de multiplicación de reales;
- el conjunto de las rotaciones de un cuerpo.

El **orden** de un grupo es el número de elementos que contiene. El orden puede finito o infinito.

[1] Niels Henrik Abel (1802 - 1829).

1.2. Grupo de permutaciones

Consideremos una permutación de cinco elementos,

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \to \{a_2, a_3, a_1, a_5, a_4\}\,. \tag{1.2.1}$$

Independientemente de la naturaleza de esos elementos, esta operación puede ser representada por el siguiente cuadro de números que indica, sobre cada columna, la posición inicial y final de un elemento,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

(o bien, con idéntico significado, por cualquier otro cuadro que difiera de los anteriores en una permutación de sus columnas).

La operación de composición de σ con otra permutación

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

se define por

$$\sigma' \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{1.2.4}$$

Esta operación satisface los axiomas de grupo. En efecto, puede constatarse que esa operación es asociativa, que el elemento neutro está dado por

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{1.2.5}$$

y que, por ejemplo, la inversa de σ en (1.2.2) está dada por el mismo cuadro de números con sus filas intercambiadas,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{1.2.6}$$

Este grupo es *no Abeliano*, como surge de verificar que $\sigma \cdot \sigma' \neq \sigma' \cdot \sigma$.

Generalizando esas definiciones, resulta que el conjunto de las *permutaciones de p elementos* se estructura como un grupo (no Abeliano), denotado por $\mathbf{S_p}$.

Consideremos la permutación $\tau \in \mathbf{S_9}$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 9 & 6 & 1 & 7 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.2.7}$$

Ella puede ser descompuesta en las **permutaciones cíclicas** independientes

$$\tau \equiv \begin{cases} 1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 5 \to 1, \\ 2 \to 3 \to 9 \to 2, \\ 8 \to 8. \end{cases} \tag{1.2.8}$$

Nótese que cada **ciclo** involucra a un cierto número de elementos que no aparece en los demás ciclos.

La permutación τ puede ser caracterizada mediante su **descomposición en ciclos**, y denotada por

$$\tau = (1\ 4\ 6\ 7\ 5)\ (2\ 3\ 9)\ (8) \equiv (2\ 3\ 9)\ (1\ 4\ 6\ 7\ 5), \tag{1.2.9}$$

dado que los ciclos independientes conmutan entre sí, como puede verificarse fácilmente.

Los ciclos de un elemento pueden ser descartados del cuadro, ya que no tienen ningún efecto en la permutación. Tampoco importa por cual elemento comienza a describirse cada ciclo, ya que con el mismo significado tenemos

$$\tau = (6\ 7\ 5\ 1\ 4)\ (9\ 2\ 3). \tag{1.2.10}$$

Un ciclo de dos elementos se llama **transposición simple**. Todo ciclo puede ser descompuesto en un producto de transposiciones simples. Por ejemplo,

$$(1\ 4\ 6\ 7\ 5) = (1\ 5)\ (1\ 7)\ (1\ 6)\ (1\ 4). \tag{1.2.11}$$

Una permutación se dice **par** o **impar** de acuerdo a que sea posible descomponerla en un número par o impar de transposiciones simples.

También es posible *representar* una permutación de p elementos mediante una matriz cuyos elementos son todos 0 excepto p de ellos iguales a 1, dispuestos de modo tal que sólo aparezca un 1 por fila y por columna. Por ejemplo, para $\sigma \in \mathbf{S_5}$ en (1.2.2) tenemos

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = M(\sigma) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}, \tag{1.2.12}$$

donde hemos introducido un *producto* de elementos a_k por 1 o 0 cuyo significado es, respectivamente, seleccionar o no a dicho elemento.

En esta **representación** del grupo $\mathbf{S_5}$, la operación de composición se reduce simplemente al producto usual de matrices, $M(\sigma'\,\sigma) = M(\sigma')\,M(\sigma)$.

Nótese que la traza de $M(\sigma)$, $\operatorname{tr} M(\sigma)$, es el número de elementos que deja invariantes la permutación σ, mientras que su determinante, $\det M(\sigma)$, es igual a +1 para permutaciones pares y a -1 para las impares. Por ejemplo, para σ en (1.2.2) y $M(\sigma)$ en (1.2.12),

$$\begin{gathered} \sigma = (1\ 3\ 2)\ (4\ 5) = (4\ 5)\ (1\ 2)\ (1\ 3), \\ \operatorname{tr} M(\sigma) = 0, \quad \det M(\sigma) = -1. \end{gathered} \tag{1.2.13}$$

Ejemplo 1.2. La **tabla** de la operación de composición en el grupo $\mathbf{S_3} = \{e, a = (1\ 2\ 3), b = (1\ 3\ 2), \alpha = (2\ 3), \beta = (3\ 1), \gamma = (1\ 2)\}$ está dada por el cuadro

$\cdot$	e	a	b	α	β	γ
e	e	a	b	α	β	γ
a	a	b	e	γ	α	β
b	b	e	a	β	γ	α
α	α	β	γ	e	a	b
β	β	γ	α	b	e	a
γ	γ	α	β	a	b	e

(1.2.14)

Si nos restringimos a las entradas correspondientes al neutro e y a una transposición simple, digamos γ, tenemos la tabla de $\mathbf{S_2}$,

$\cdot$	e	γ
e	e	γ
γ	γ	e

(1.2.15)

que coincide formalmente con la tabla del **grupo aditivo de los enteros módulo 2**, $\mathbb{Z}_2$,

$(+)_{\text{mod}\,2}$	0	1
0	0	1
1	1	0

(1.2.16)

con la identificación $e \leftrightarrow 0, \gamma \leftrightarrow 1$.

Similarmente, las entradas de la tabla de $\mathbf{S_3}$ correspondientes a la composición de las permutaciones cíclicas de tres elementos,

$\cdot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

(1.2.17)

no involucran a las transposiciones simples, y coinciden formalmente con la tabla del **grupo aditivo de los enteros módulo 3**, $\mathbb{Z}_3$,

$$\begin{array}{c|ccc} (+)_{\text{mod}\,3} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \tag{1.2.18}$$

con la identificación entre elementos $e \leftrightarrow 0, a \leftrightarrow 1, b \leftrightarrow 2$.

Dos grupos entre cuyos elementos existe una correspondencia biunívoca de modo que sus tablas de composición resulten idénticas se dicen **isomorfos**.

Un subconjunto $H \subset G$ que contiene a la identidad y a la inversa de cada uno de sus elementos, y que es **cerrado** respecto de la operación de composición en G, constituye un **subgrupo** de G.

Todo grupo G tiene dos **subgrupos impropios**: G y $\{e\}$. Todo otro subgrupo se dice **propio**.

La intersección de subgrupos también constituye un subgrupo, como puede verificarse fácilmente.

Ejemplo 1.3. Los siguientes son ejemplos de subgrupos:

a) Los enteros $\mathbb{Z}$ forman un subgrupo del grupo aditivo de los reales $\mathbb{R}$.
b) Las rotaciones sobre un plano forman un subgrupo del grupo de rotaciones en el espacio.
c) Las rotaciones alrededor de un eje en ángulos $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ forman un subgrupo del grupo de rotaciones en el plano.

1.3. Homomorfismo - Representaciones

Un **homomorfismo** es una aplicación sobreyectiva entre grupos, $\phi : G \to H$, que satisface

$$\phi(g \cdot g') = \phi(g) \cdot \phi(g') \in H, \ \forall\, g, g' \in G. \tag{1.3.1}$$

Dos grupos G y H se dicen **isomorfos**, lo que se denota por $G \approx H$, si entre sus elementos existe una aplicación biunívoca (uno a uno y sobreyectiva) que preserva las operaciones de composición como en (1.3.1). En ese caso la aplicación $\phi : G \leftrightarrow H$ constituye un **isomorfismo**.

Independientemente de la naturaleza de cada grupo, una vez identificados sus elementos mediante el isomorfismo ϕ, grupos isomorfos presentan la misma tabla de composición.

El isomorfismo establece una relación de equivalencia entre grupos. En efecto, es evidente que $G \approx G$; que si $G \approx H \Rightarrow H \approx G$; y que si $G \approx F$ y $F \approx H \Rightarrow G \approx H$.

Esto permite definir *clases de equivalencia*, donde dos grupos están en la misma clase si son isomorfos entre sí. Todos los grupos dentro de una clase presentan la misma tabla de composición, la que entonces caracteriza a la clase de equivalencia o **grupo abstracto**.

Los diversos grupos pertenecientes a una misma clase constituyen distintas **realizaciones** de ese *grupo abstracto* (cuyos elementos no están especificados). Cada clase de equivalencia puede ser identificada por uno cualquiera de los grupos que contiene.

Ejemplo 1.4. Existe un único grupo abstracto de orden 2, denominado $\mathbb{Z}_2$ y caracterizado por la tabla en (1.2.16). Distintas realizaciones de ese grupo son $\mathbb{Z}_2$, $\mathbf{S_2}$, el grupo $\{+1, -1\}$ respecto del producto de reales, o el grupo

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{1.3.2}$$

respecto del producto usual de matrices.

Similarmente, existe un único grupo abstracto de orden 3, denominado $\mathbb{Z}_3$ y caracterizado por la tabla en (1.2.18). Distintas realizaciones de este grupo son el propio $\mathbb{Z}_3$ o el subgrupo de $\mathbf{S_3}$ correspondiente a las permutaciones cíclicas de tres elementos, $\{e, a, b\}$, cuya tabla está dada en (1.2.17).

Para órdenes mayores de 3 es posible construir varias tablas que satisfacen los axiomas de grupo.

Un homomorfismo de un grupo G sobre un grupo de operadores lineales H (definidos sobre cierto espacio lineal $\mathbf{E}$) constituye una **representación lineal** de G. Cuando esta aplicación es un isomorfismo, la representación se dice **fiel**.

Si el **espacio de la representación E** es de dimensión finita, H es un grupo de matrices (cuando los operadores son referidos a cierta base de $\mathbf{E}$). En ese caso se tiene una **representación matricial** de G, donde la operación de composición en el grupo H se reduce al producto usual de matrices.

Ejemplo 1.5. La asignación de una matriz $M(\sigma)$ a cada permutación σ, como en (1.2.12), constituye una representación matricial *fiel* del grupo $\mathbf{S_p}$, que llamaremos **representación de definición**,

$$\phi : \mathbf{S_p} \leftrightarrow \{M(\sigma) \mid \sigma \in \mathbf{S_p}\} \,. \tag{1.3.3}$$

Por ejemplo, para el grupo $\mathbf{S_3}$ tenemos

$$
\begin{array}{c}
M(e)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad M(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad M(b)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \\
M(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad M(\beta)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \quad M(\gamma)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.
\end{array}
\tag{1.3.4}
$$

Todo grupo tiene una **representación trivial**, en la cual todo elemento es representado por el operador identidad. La mínima dimensión posible para el espacio de esta representación es $\dim \mathbf{E} = 1$, en cuyo caso tenemos $\phi : G \to \{1\}$. Esta representación no es fiel (excepto para el grupo trivial $\mathbb{Z}_1 = \{e\}$).

Para los grupos de permutaciones $\mathbf{S_p}$ existe una segunda representación unidimensional, llamada **representación alternada**, en la que cada permutación σ es representada por (la matriz de 1×1) $+1$ ó -1, de acuerdo a que σ sea par ó impar respectivamente.

Esta representación tampoco es fiel, excepto para $\mathbf{S_2}$. Por ejemplo, para $\mathbf{S_3}$ tenemos $\phi(e) = \phi(a) = \phi(b) = +1$ y $\phi(\alpha) = \phi(\beta) = \phi(\gamma) = -1$.

Ejemplo 1.6. Las rotaciones en un plano forman un grupo (subgrupo del grupo de las rotaciones en el espacio $\mathbb{R}^3$). Ellas pueden ser representadas como matrices de 2×2 que actúan sobre vectores reales del mismo plano $\mathbb{R}^2$ (*espacio de la representación*). La rotación en un ángulo $\varphi \in [0, 2\pi)$ alrededor del origen, $R(\varphi)$, corresponde a la acción de la matriz

$$
\phi(R(\varphi)) = D(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}. \tag{1.3.5}
$$

Se trata de una representación fiel, puesto que la relación entre $R(\varphi)$ y $D(\varphi)$ es biunívoca y satisface que

$$
\phi\left(R(\varphi_1)\cdot R(\varphi_2)\right) = \phi\left(R\left([\varphi_1+\varphi_2]_{\mathrm{mod}\, 2\pi}\right)\right) = \phi\left(R(\varphi_1)\right)\cdot \phi\left(R(\varphi_2)\right), \tag{1.3.6}
$$

como se comprueba fácilmente del cálculo del producto de matrices

$$
D(\varphi_1)\, D(\varphi_2) = D\left([\varphi_1+\varphi_2]_{\mathrm{mod}\, 2\pi}\right). \tag{1.3.7}
$$

Por otra parte, todas las matrices $D(\varphi)$ en (1.3.5) pueden ser simultáneamente diagonalizadas, para llevarlas a la forma

$$D(\varphi) \to \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{1.3.8}$$

Evidentemente, el conjunto de los bloques diagonales (de 1×1) constituye una representación unidimensional fiel del grupo de rotaciones en el plano,

$$R(\varphi) \leftrightarrow D_{\pm}(\varphi) := e^{\pm i\varphi}, \tag{1.3.9}$$

que actúa sobre un espacio de representación complejo unidimensional, y en la cual la operación del grupo se reduce al producto usual de complejos.

Pueden construirse otras representaciones unidimensionales no fieles de este grupo mediante la asignación $R(\varphi) \to D_m(\varphi) = e^{im\varphi}$, con $m \in \mathbb{Z}$ y $m \neq \pm 1$. En efecto, $D_m(\varphi_1)D_m(\varphi_2) = D_m\left([\varphi_1 + \varphi_2]_{\text{mod}\, 2\pi}\right)$ y además $D_m(\frac{2k\pi}{m}) = e^{im\frac{2k\pi}{m}} = 1 = D_m(0)$, con $k = 0, 1, \dots m-1$.

1.4. Subgrupos - Cosets

Recordemos que un subconjunto $H \subset G$ es un **subgrupo** de G si

a) el elemento identidad $e \in H$,

b) si $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$,

c) $\forall\, h_1, h_2 \in H$, se tiene que $h_1 \cdot h_2 \in H$.

Con esas propiedades, H se estructura como un grupo respecto de la misma ley de composición del grupo G. En efecto, H es cerrado respecto de una ley de composición asociativa, con neutro e inverso.

Teorema 1.1. *El subconjunto $H \subset G$ es un subgrupo del grupo G si y sólo si $\forall\, a, b \in H$ resulta que $a \cdot b^{-1} \in H$.*

Por una parte, resulta evidente que si H es un subgrupo de G, entonces $a \cdot b^{-1} \in H, \forall\, a, b \in H$.

Supongamos ahora que $\forall\, a, b \in H$ resulta que $a \cdot b^{-1} \in H$. Entonces,

a) Como H no es vacío, si $a \in H \Rightarrow a \cdot a^{-1} = e \in H$.

b) Además, si $e, a \in H \Rightarrow e \cdot a^{-1} = a^{-1} \in H$.

c) Finalmente, si $a, b \in H \Rightarrow a, b^{-1} \in H \Rightarrow a \cdot (b^{-1})^{-1} = a \cdot b \in H$.

Por lo tanto, H es un subgrupo de G. □

El **núcleo** (o **kernel**) de un homomorfismo $\phi : G \to H$, denotado por $\phi^{-1}(e_H)$, es el conjunto de los elementos de G que tienen por imagen al elemento neutro en

H,

$$\phi(g) = e_H, \ \forall\, g \in \phi^{-1}(e_H)\,. \tag{1.4.1}$$

El núcleo de un homomorfismo $\phi : G \to H$ es un subgrupo de G. En efecto, si $a, b \in \phi^{-1}(e_H) \Rightarrow \phi(a) = e_H$ y $\phi(b^{-1}) = \phi(b)^{-1} = e_H^{-1} = e_H \Rightarrow \phi(a \cdot b^{-1}) = \phi(a) \cdot \phi(b^{-1}) = e_H \cdot e_H = e_H$. Por lo tanto, $a \cdot b^{-1} \in \phi^{-1}(e_H)$ que, en consecuencia, es un subgrupo.

Sea H un subgrupo propio del grupo G, y sea $a_1 \notin H$. Consideremos el subconjunto de G formado por los elementos de la forma $a_1 \cdot h$, con $h \in H$, que denotamos por $a_1 \cdot H$. Si $\exists\, a_2 \notin H \cup a_1 \cdot H$, formamos el subconjunto $a_2 \cdot H = \{a_2 \cdot h, \text{ con } h \in H\}$, y así siguiendo hasta agotar los elementos del grupo. El subgrupo H puede denotarse como $e \cdot H$.

Los subconjuntos de G así construidos, llamados **cosets izquierdos**[2] del subgrupo H, son *disjuntos*. En efecto, si dos de ellos tuvieran un elemento en común, $a_i \cdot h_1 = a_k \cdot h_2$, con $h_1, h_2 \in H$. Entonces, $a_k = (a_i \cdot h_1) \cdot h_2^{-1} = a_i \cdot (h_1 \cdot h_2^{-1}) = a_i \cdot h_3$, donde $h_3 = h_1 \cdot h_2^{-1} \in H \Rightarrow a_k \in a_i \cdot H$, lo que (por construcción) no puede ocurrir si $a_k \neq a_i$. Por lo tanto, $a_i \cdot H \cap a_k \cdot H = \emptyset$ para $k \neq i$.

Por otra parte, los cosets $a \cdot H$ son *independientes* del elemento $a = a \cdot e \in a \cdot H$ que se emplea en su construcción. En efecto, supongamos que $b \in a \cdot H \Rightarrow b = a \cdot h$, para algún $h \in H$. Pero entonces, $a = b \cdot h^{-1} \in b \cdot H$. Sea ahora $c = a \cdot h_1 \in a \cdot H \Rightarrow c = b \cdot h^{-1} \cdot h_1 \in b \cdot H$. En esas condiciones, $a \cdot H \subset b \cdot H$. Se prueba de manera similar que $b \cdot H \subset a \cdot H$. En consecuencia, $a \cdot H = b \cdot H$.

En esas condiciones, el conjunto G puede expresarse como la unión de los conjuntos disjuntos correspondientes a los cosets izquierdos de H,

$$G = \bigcup_k a_k \cdot H\,. \tag{1.4.2}$$

En particular, si G es de orden finito, $\#G = n$, también lo es $H \subset G$, y los cosets tienen todos el mismo número de elementos que H, $\#H = m$. Como los cosets son disjuntos, los hay en un número finito k tal que $n = m\,k$. Con esto queda establecido el siguiente teorema.

Teorema 1.2. (de Lagrange)[3] *El orden de un subgrupo H de un grupo de orden finito G es un divisor del orden de G,*

$$\frac{\#G}{\#H} = k \in \mathbb{N}\,. \tag{1.4.3}$$

---

[2]De manera similar se definen los **cosets derechos** de H.

[3]Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813).

Una consecuencia inmediata de este teorema es que un grupo de orden primo sólo tiene subgrupos impropios.

Sea G un grupo de orden finito y sea $a \in G$ uno de sus elementos. Consideremos el conjunto de elementos de G de la forma $e, a, a^2 = a \cdot a, \ldots, a^{k+1} = a \cdot a^k, \ldots$. Como $\#G < \infty$, los elementos a^k no pueden ser todos distintos. Supongamos que $a^p = a^q$, con $p > q$; entonces $a^{p-q} = e$. Sea n el menor número natural para el cual $a^n = e$. En ese caso, el elemento a se dice de orden n.

En esa condiciones, el conjunto $\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ forma un grupo llamado **grupo cíclico de orden** n, que es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$. En efecto, $a^k \cdot a^l = a^{k+l|_{\text{mod}\, n}}$.

Teorema 1.3. (de Cayley)[4] *Todo grupo de orden finito n es isomorfo a un subgrupo regular de $\mathbf{S_n}$.*

Consideremos la tabla de la ley de composición en un grupo G de orden finito n,

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\cdot & e = a_1 & a_2 & \ldots & a_k & \ldots & a_n \\
\hline
e = a_1 & a_1 \cdot a_1 & a_1 \cdot a_2 & \ldots & a_1 \cdot a_k & \ldots & a_1 \cdot a_n \\
a_2 & a_2 \cdot a_1 & a_2 \cdot a_2 & \ldots & a_2 \cdot a_k & \ldots & a_2 \cdot a_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_l & a_l \cdot a_1 & a_l \cdot a_2 & \ldots & a_l \cdot a_k & \ldots & a_l \cdot a_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_n & a_n \cdot a_1 & a_n \cdot a_2 & \ldots & a_n \cdot a_k & \ldots & a_n \cdot a_n
\end{array}
\tag{1.4.4}
$$

donde $a_1 = e$.

Primero señalemos que los elementos no se repiten en la filas ni en las columnas de esa tabla. En efecto, si, por ejemplo, un elemento se repitiera en la i-ésima fila, $a_i \cdot a_k = a_i \cdot a_l \Rightarrow a_k = a_l$, lo que no puede ser dado que los elementos de G tienen una única entrada en la tabla para la multiplicación a derecha.

En consecuencia, la k-ésima columna (que corresponde a la multiplicación a derecha por a_k y en la que, como se dijo, aparecen los n elementos del grupo) se obtiene de la primera mediante una **permutación regular** (es decir, una permutación que no deja invariante ningún elemento):

$$
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot a_k \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_k \\ a_2 \cdot a_k \\ \vdots \\ a_n \cdot a_k \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{\pi_k(1)} \\ a_{\pi_k(2)} \\ \vdots \\ a_{\pi_k(n)} \end{pmatrix},
\tag{1.4.5}
$$

donde π_k es una biyección de $\{1, 2, \cdots, n\}$ en $\{1, 2, \cdots, n\}$ que no tiene puntos fijos.

[4]Arthur Cayley (1821 - 1895).

Hemos convenido en representar esa operación por

$$\phi(a_k) = \begin{pmatrix} \pi_k(1) & \pi_k(2) & \dots & \pi_k(k) & \dots & \pi_k(n) \\ 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \pi_k(\pi_k^{-1}(1)) & \pi_k(\pi_k^{-1}(2)) & \dots & \pi_k(\pi_k^{-1}(k)) & \dots & \pi_k(\pi_k^{-1}(n)) \\ \pi_k^{-1}(1) & \pi_k^{-1}(2) & \dots & \pi_k^{-1}(k) & \dots & \pi_k^{-1}(n) \end{pmatrix} = \qquad (1.4.6)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ \pi_k^{-1}(1) & \pi_k^{-1}(2) & \dots & \pi_k^{-1}(k) & \dots & \pi_k^{-1}(n) \end{pmatrix}.$$

Esta correspondencia entre elementos de G y el conjunto de permutaciones regulares así construidas (más la identidad) es uno a uno, puesto que si $\phi(a_l) = \phi(a_k)$, entonces $\pi_l = \pi_k$ y necesariamente las columnas l-ésima y k-ésima son idénticas, de modo que $a_l = a_k$.

Para la multiplicación a derecha por la composición de dos elementos tenemos

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot a_k \cdot a_l \to \begin{pmatrix} a_{\pi_k(1)} \\ a_{\pi_k(2)} \\ \vdots \\ a_{\pi_k(n)} \end{pmatrix} \cdot a_l \to \begin{pmatrix} a_{\pi_l(\pi_k(1))} \\ a_{\pi_l(\pi_k(2))} \\ \vdots \\ a_{\pi_l(\pi_k(n))} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{\pi_l \circ \pi_k(1)} \\ a_{\pi_l \circ \pi_k(2)} \\ \vdots \\ a_{\pi_l \circ \pi_k(n)} \end{pmatrix}, \qquad (1.4.7)$$

y para la representación de esta operación

$$\phi(a_k \cdot a_l) = \begin{pmatrix} \pi_l \circ \pi_k(1) & \pi_l \circ \pi_k(2) & \dots & \pi_l \circ \pi_k(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \pi_l \circ \pi_k \left(\pi_k^{-1}(1)\right) & \pi_l \circ \pi_k \left(\pi_k^{-1}(2)\right) & \dots & \pi_l \circ \pi_k \left(\pi_k^{-1}(n)\right) \\ \pi_k^{-1}(1) & \pi_k^{-1}(2) & \dots & \pi_k^{-1}(n) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \pi_l(1) & \pi_l(2) & \dots & \pi_l(n) \\ \pi_k^{-1}(1) & \pi_k^{-1}(2) & \dots & \pi_k^{-1}(n) \end{pmatrix} = \qquad (1.4.8)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_k^{-1}(1) & \pi_k^{-1}(2) & \dots & \pi_k^{-1}(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_l(1) & \pi_l(2) & \dots & \pi_l(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} =$$

$$= \phi(a_k) \cdot \phi(a_l)\,.$$

Por lo tanto, ϕ establece un isomorfismo entre el grupo G de orden n y un **subgrupo regular** de orden n del grupo de permutaciones de n elementos, $\mathbf{S_n}$. □

Siendo $\mathbf{S_n}$ un grupo de orden finito, resulta que el número de subgrupos que contiene es necesariamente finito. Esto implica que hay sólo un número *finito* de grupos de orden $n \in \mathbb{N}$ que no son isomorfos entre sí.

1.5. Clases de elementos conjugados

Dos elementos $a, b \in G$ se dicen **conjugados** si existe un tercer elemento $g \in G$ tal que $a = g \cdot b \cdot g^{-1}$.

Esta definición establece una relación de equivalencia. En efecto,

a) todo elemento es conjugado de sí mismo: $a = e \cdot a \cdot e^{-1}$;
b) si a es conjugado de b, entonces b es conjugado de a: $a = g \cdot b \cdot g^{-1} \Rightarrow b = g^{-1} \cdot a \cdot (g^{-1})^{-1}$;
c) si a es conjugado de b, y b lo es de c, entonces el primero es conjugado del último: $a = g \cdot b \cdot g^{-1},\ b = h \cdot c \cdot h^{-1} \Rightarrow a = (g \cdot h) \cdot c \cdot (g \cdot h)^{-1}$.

Mediante esta relación pueden organizarse los elementos del grupo G en clases de equivalencia, llamadas **clases de elementos conjugados**.

Algunas consecuencias:

- El elemento neutro forma una clase por sí solo: si $a = g \cdot e \cdot g^{-1} \Rightarrow a = e$.
- Si G es un grupo Abeliano, cada elemento forma una clase por sí mismo: $a = g \cdot b \cdot g^{-1} = b \cdot g \cdot g^{-1} = b$.
- Todos los elementos de una clase son del mismo orden: Supongamos que b es de orden n y que $a = g \cdot b \cdot g^{-1}$; entonces $a^n = g \cdot b^n \cdot g^{-1} = g \cdot e \cdot g^{-1} = e$.

Ejemplo 1.7. Para determinar las clases de elementos conjugados del grupo $\mathbf{S_n}$, consideremos dos permutaciones

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}. \tag{1.5.1}$$

La inversa de τ está dada por

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \tag{1.5.2}$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\tau\cdot\sigma\cdot\tau^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \dots & \tau(\sigma(n))\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix} \qquad (1.5.3)\\
&= \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \dots & \tau(\sigma(n))\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Este resultado corresponde a realizar la misma permutación *física* de elementos que con σ, pero a partir de un ordenamiento distinto, dado por $\tau(1)\ \tau(2)\ \dots\ \tau(n)$. Esto puede verse fácilmente si se considera, por ejemplo, una transposición simple, $\sigma = (1\ 2)$, para la cual,

$$
\tau\cdot\sigma\cdot\tau^{-1} = \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \dots & \tau(n) \\ \tau(2) & \tau(1) & \tau(3) & \dots & \tau(n)\end{pmatrix} = (\tau(1)\ \tau(2))\,, \qquad (1.5.4)
$$

o un ciclo de tres, $\sigma = (1\ 2\ 3)$, para el cual tenemos

$$
\tau\cdot\sigma\cdot\tau^{-1} = \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \tau(4) & \dots & \tau(n) \\ \tau(2) & \tau(3) & \tau(1) & \tau(4) & \dots & \tau(n)\end{pmatrix} = (\tau(1)\ \tau(2)\ \tau(3))\,. \qquad (1.5.5)
$$

En el caso general, se puede comprobar que σ y $\tau\cdot\sigma\cdot\tau^{-1}$ se descomponen en ciclos de la misma longitud, si bien los elementos involucrados por ellos en uno y otro caso son, en general, diferentes.

Recíprocamente, se puede mostrar que dos permutaciones que presentan la misma estructura en ciclos son conjugadas una de la otra.

De ese modo, la descomposición en ciclos permite caracterizar las clases de elementos conjugados en el grupo $\mathbf{S_n}$. Por ejemplo,

$$
\mathbf{S_2} : \left\{ \begin{array}{c} e = (1)\,(2) \\ \gamma = (1\ 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \text{ clases}, \qquad (1.5.6)
$$

$$
\mathbf{S_3} : \left\{ \begin{array}{l} e = (1)\,(2)\,(3) \\ a = (1\ 2\ 3),\ b = (1\ 3\ 2) \\ \alpha = (2\ 3),\ \beta = (3\ 1),\ \gamma = (1\ 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \text{ clases}, \qquad (1.5.7)
$$

$$\mathbf{S_4}: \left\{ \begin{array}{l} e \\ (1\ 2),\ (1\ 3),\ \ldots \\ (1\ 2)\,(3\ 4),\ (1\ 3)\,(2\ 4),\ \ldots \\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 2\ 4),\ \ldots \\ (1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 3\ 2\ 4),\ \ldots \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \text{ clases} \tag{1.5.8}$$

(donde hemos omitido los ciclos de longitud uno).

También se ve que el número de clases de $\mathbf{S_n}$ es igual al número de particiones de n. Por ejemplo, para $\mathbf{S_4}$

$$\begin{array}{rcl} 4 &=& 1+1+1+1, \\ 4 &=& 2+1+1, \\ 4 &=& 2+2, \\ 4 &=& 3+1, \\ 4 &=& 4. \end{array} \tag{1.5.9}$$

Esto permite representar gráficamente las clases mediante **diagramas de Young**[5], en los que cada ciclo es representado por un número de cuadros contiguos, dispuestos horizontalmente, igual a su longitud.

$$\begin{array}{c} \{e\} \to \ydiagram{1,1,1,1}\ , \quad \{(1\ 2)\,(3)\,(4),\ \ldots\} \to \ydiagram{2,1,1}\ , \\[2ex] \{(1\ 2)\,(3\ 4),\ \ldots\} \to \ydiagram{2,2}\ , \quad \{(1\ 2\ 3)(4),\ \ldots\} \to \ydiagram{3,1}\ , \\[2ex] \{(1\ 2\ 3\ 4),\ \ldots\} \to \ydiagram{4}\ . \end{array} \tag{1.5.10}$$

También podemos calcular el número de permutaciones en cada clase considerando las posibles disposiciones de los cuatro elementos en los cuadros del correspondiente diagrama, teniendo en cuenta que disposiciones que difieren en una permutación cíclica de los elementos de un ciclo, o en el intercambio de los elementos

[5]Alfred Young (1873 - 1940).

de dos ciclos de la misma longitud, corresponden a la misma permutación:

$$
\begin{gathered}
\#\left(\,\yng(1,1,1,1)\,\right)=\frac{4!}{4!}=1, \quad \#\left(\,\yng(2,1,1)\,\right)=\frac{4!}{2\times 2!}=6, \\
\#\left(\,\yng(2,2)\,\right)\frac{4!}{2^2\times 2!}=3, \quad \#\left(\,\yng(3,1)\,\right)=\frac{4!}{3}=8, \\
\#\left(\,\yng(4)\,\right)=\frac{4!}{4}=6,
\end{gathered}
\tag{1.5.11}
$$

cuya suma corresponde al orden del grupo, $\#G = 4!$.

La generalización al caso de $\mathbf{S_n}$ es inmediata: si en un diagrama se tienen r_1 ciclos de longitud 1, r_2 ciclos de longitud 2, etc, el orden de la clase es

$$
\#(\dots)=\frac{n!}{1^{r_1}\times 2^{r_2}\times\cdots\times r_1!\times r_2!\dots}\,. \tag{1.5.12}
$$

1.6. Subgrupos invariantes

Se llama **subgrupo conjugado** de un subgrupo $H \subset G$ a aquel subgrupo de G cuyos elementos se obtienen de los de H por conjugación con un elemento fijo $g \in G$,

$$
H' = g\cdot H\cdot g^{-1} = \{h'\in G \mid h' = g\cdot h\cdot g^{-1},\ \text{con}\ h\in H\}. \tag{1.6.1}
$$

Este conjunto constituye efectivamente un subgrupo: sean $h'_1, h'_2 \in H'$, entonces $h'_{1,2} = g\cdot h_{1,2}\cdot g^{-1} \Rightarrow h'_1\cdot(h'_2)^{-1} = g\cdot h_1\cdot(h_2)^{-1}\cdot g^{-1}\in H'$, dado que $h_1\cdot(h_2)^{-1}\in H$.

Un subgrupo se dice **invariante** si contiene a todos sus subgrupos conjugados, $g\cdot H\cdot g^{-1}\subset H, \forall\, g\in G$.

Si H es invariante, entonces contiene a sus elementos en clases completas: $h \in H \Rightarrow g\cdot h\cdot g^{-1}\in H,\ \forall\, g\in G$.

Ejemplo 1.8. Los siguientes son ejemplos de subgrupos invariantes:

- Los subgrupos impropios $\{e\}$ y G, así como la intersección de subgrupos invariantes, son invariantes.
- Todo subgrupo de un grupo Abeliano es invariante.
- El núcleo $\phi^{-1}(e_H)$ de un homomorfismo $\phi: G\to H$ es un subgrupo invariante. En efecto, supongamos que $a\in\phi^{-1}(e_H)\Rightarrow \phi(a)=e_H$. Entonces, $\forall\, g\in G$ tenemos que $\phi(g\cdot a\cdot g^{-1}) = \phi(g)\cdot\phi(a)\cdot\phi(g^{-1}) = \phi(g)\cdot e_H\cdot\phi(g)^{-1} = e_H$. En consecuencia, el subgrupo $\phi^{-1}(e_H)$ (ver Sec. 1.4) contiene a sus elementos en clases completas.

- El conjunto de las **matrices regulares** (con inversa) de $n \times n$ forman el **grupo lineal** $GL(n)$ (respecto del producto usual de matrices). El conjunto de las matrices de $n \times n$ con determinante igual a 1 constituye el **subgrupo especial lineal** $SL(n)$, que es invariante. En efecto, si $M \in SL(n)$, $\det(N\,M\,N^{-1}) = \det N \, \det M \, (\det N)^{-1} = 1, \ \forall\, N \in GL(n)$.

Si H es un subgrupo invariante de G, entonces sus cosets izquierdos *coinciden* con los cosets derechos. En efecto, sea $a \cdot H = \{a \cdot h \,|\, h \in H\}$, entonces $a \cdot h = (a \cdot h \cdot a^{-1}) \cdot a = h' \cdot a \in H \cdot a, \ \forall\, h \in H$, puesto que $h' = a \cdot h \cdot a^{-1} \in H$. En consecuencia, $a \cdot H \subset H \cdot a$. De manera similar se demuestra que $H \cdot a \subset a \cdot H$. Por lo tanto, si H es invariante $\Rightarrow a \cdot H = H \cdot a, \ \forall\, a \in G$.

Un grupo se dice **simple** si no contiene subgrupos propios invariantes.

Un grupo se dice **semi-simple** si no contiene subgrupos propios Abelianos invariantes.

Ejemplo 1.9. los únicos grupos Abelianos simples son los grupos cíclicos de orden primo, que no tienen subgrupos propios.

1.7. El grupo cociente

Sea H un subgrupo invariante de G. Podemos descomponer a G en cosets izquierdos de H, de modo que $G = e \cdot H \cup a_1 \cdot H \cup a_2 \cdot H \ldots$, donde $a_k \notin H, \ \forall\, k$.

Consideremos dos elementos cualesquiera $a_i \cdot h_1 \in a_i \cdot H$ y $a_k \cdot h_2 \in a_k \cdot H$. Su composición es

$$(a_i \cdot h_1) \cdot (a_k \cdot h_2) = (a_i \cdot a_k) \cdot (a_k^{-1} \cdot h_1 \cdot a_k) \cdot h_2 \in (a_i \cdot a_k) \cdot H, \qquad (1.7.1)$$

puesto que $(a_k^{-1} \cdot h_1 \cdot a_k) \in H, \ \forall\, h_1, h_2 \in H$.

Entonces resulta natural definir una operación entre cosets de modo que

$$(a_i \cdot H) \cdot (a_k \cdot H) = (a_i \cdot a_k) \cdot H\,. \qquad (1.7.2)$$

Puesto que ella se basa en la composición en G, esta operación es asociativa. Existe un elemento neutro que corresponde a $H = e \cdot H$, y todo coset $a_k \cdot H$ tiene un inverso correspondiente al coset que contiene al elemento a_k^{-1}, $a_k^{-1} \cdot H$

$$\begin{aligned} (a \cdot H) \cdot (e \cdot H) &= (a \cdot e) \cdot H = (a \cdot H)\,, \\ (a \cdot H) \cdot (a^{-1} \cdot H) &= (a \cdot a^{-1}) \cdot H = (e \cdot H)\,. \end{aligned} \qquad (1.7.3)$$

Así estructurado, el conjunto de cosets del subgrupo invariante H conforma un grupo llamado **grupo cociente** y denotado por G/H.

Es posible establecer un homomorfismo $\phi : G \to G/H$ cuyo núcleo es $\phi^{-1}(e_{G/H}) = H$. En efecto, sea ϕ una aplicación que asigne a cada elemento de G el coset que lo contiene,

$$\phi(h) := e \cdot H, \ \phi(a \cdot h) := a \cdot H, \ \forall\, h \in H, \ \forall\, a \notin H \,. \tag{1.7.4}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &\phi(a_i \cdot h_1) \cdot \phi(a_k \cdot h_2) = (a_i \cdot H) \cdot (a_k \cdot H) = (a_i \cdot a_k) \cdot H = \\ &\qquad = \phi((a_i \cdot a_k) \cdot h_3) = \phi((a_i \cdot h_1) \cdot (a_k \cdot h_2)) \,, \end{aligned} \tag{1.7.5}$$

donde $h_3 = a_k^{-1} \cdot h_1 \cdot a_k \cdot h_2 \in H$. Entonces ϕ es un homomorfismo de núcleo H.

Teorema 1.4. *Sea $\phi : G \to G'$ un homomorfismo (sobreyectivo) de núcleo $\phi^{-1}(e') = H \subset G$. Entonces, H es un subgrupo invariante de G y el grupo cociente G/H es isomorfo a G'.*

Ya sabemos que el núcleo de un homomorfismo es un subgrupo invariante, respecto del cual podemos construir el grupo cociente G/H.

Definamos ahora una aplicación $\overline{\phi} : G/H \to G'$ de modo que $\overline{\phi}(a \cdot H) = \phi(a)$. Dado que dos elementos en $a \cdot H$ difieren en la composición con un elemento de H, esta asignación es independiente del elemento empleado para caracterizar el coset: $\phi(a \cdot h) = \phi(a) \cdot \phi(h) = \phi(a) \cdot e' = \phi(a), \ \forall\, h \in H$.

Entonces,

$$\begin{aligned} &\overline{\phi}((a \cdot H) \cdot (b \cdot H)) = \overline{\phi}((a \cdot b) \cdot H) = \phi(a \cdot b) = \\ &\qquad = \phi(a) \cdot \phi(b) = \overline{\phi}(a \cdot H) \cdot \overline{\phi}(b \cdot H) \,. \end{aligned} \tag{1.7.6}$$

Por lo tanto, $\overline{\phi} : G/H \to G'$ es un homomorfismo.

Como el rango de $\phi(g)$ es todo G', $\forall\, g' \in G'$ $\exists\, g \in G$ tal que $\overline{\phi}(g \cdot H) = \phi(g) = g'$. Por lo tanto, $\overline{\phi} : G/H \to G'$ también es sobreyectivo.

Finalmente, si $\overline{\phi}(a \cdot H) = \overline{\phi}(b \cdot H) \Rightarrow \phi(a) \cdot \phi(b)^{-1} = \phi(a \cdot b^{-1}) = e'$. Entonces, $a \cdot b^{-1} \in H \Rightarrow a = h \cdot b \in H \cdot b = b \cdot H$, por ser H invariante. Pero entonces $a \cdot H = b \cdot H$, y el homomorfismo es uno a uno (es decir, es un isomorfismo).

Por lo tanto, $G/H \approx G'$. □

1.8. Producto directo de grupos

A partir de dos grupos G_1 y G_2 es posible construir un tercer grupo $G = G_1 \times G_2$, llamado **producto directo**, de la siguiente manera.

Sean $a_1, b_1, c_1, \dots \in G_1$ y $a_2, b_2, c_2, \dots \in G_2$. El grupo $G_1 \times G_2$ es el conjunto de los pares ordenados $\langle g_1, g_2 \rangle$ estructurado con la ley de composición

$$\langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle := \langle a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2 \rangle \,. \tag{1.8.1}$$

Puede verificarse que esta ley es asociativa, tiene por elemento neutro al par $\langle e_1, e_2 \rangle$, y el inverso de $\langle g_1, g_2 \rangle$ es el par $\langle g_1^{-1}, g_2^{-1} \rangle$. Si G_1 y G_2 son de orden finito, $\#G = \#G_1 \, \#G_2$.

Los elementos de la forma $\langle e_1, g_2 \rangle$ forman un subgrupo invariante $\widetilde{G_2}$ de $G_1 \times G_2$, isomorfo a G_2. Similarmente, los pares de la forma $\langle g_1, e_2 \rangle$ forman un subgrupo invariante $\widetilde{G_1}$ de $G_1 \times G_2$, isomorfo a G_1. Evidentemente, elementos de esos subgrupos conmutan entre sí,

$$\langle e_1, g_2 \rangle \cdot \langle g_1, e_2 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle g_1, e_2 \rangle \cdot \langle e_1, g_2 \rangle \,, \tag{1.8.2}$$

y todo elemento de $G_1 \times G_2$ puede escribirse en la forma de un producto como en (1.8.2).

Puede verificarse fácilmente que $G/\widetilde{G_2} \approx G_1$, y que $G/\widetilde{G_1} \approx G_2$. Por ejemplo, los elementos de $G/\widetilde{G_2}$ son los cosets de la forma

$$\langle a_1, e_2 \rangle \cdot \widetilde{G_2} = \{ \langle a_1, e_2 \rangle \cdot \langle e_1, g_2 \rangle = \langle a_1, g_2 \rangle \,,\, g_2 \in G \} \tag{1.8.3}$$

para cada $a_1 \in G_1$, de donde resulta de inmediato el isomorfismo $G/\widetilde{G_2} \approx G_1$.

Recíprocamente, si un grupo G tiene dos subgrupos invariantes G_1 y G_2 tales que

$$G_1 \cap G_2 = \{e\} \quad \text{y} \quad g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1, \ \forall \, g_1 \in G_1 \,, g_2 \in G_2 \,, \tag{1.8.4}$$

y si todo elemento $g \in G$ tiene una descomposición (única[6]) como un producto de la forma $g = g_1 \cdot g_2$, con $g_1 \in G_1 \,, g_2 \in G_2$, entonces $G = G_1 \times G_2$. También en este caso $G/G_2 \approx G_1$ y $G/G_1 \approx G_2$.

1.9. Automorfismo - Centro de un grupo

Un **automorfismo** es un isomorfismo de un grupo en sí mismo, $\phi : G \leftrightarrow G$. El conjunto de todos los automorfismos forma un grupo respecto de la composición usual de aplicaciones. Su elemento neutro es la aplicación identidad.

Ejemplo 1.10. Para el grupo cíclico $\{e, a, a^2\}$, la aplicación

$$\phi(e) = e \,,\ \phi(a) = a^2 \,,\ \phi(a^2) = a \,, \tag{1.9.1}$$

[6]En efecto, si un elemento de G puede expresarse como $g = g_1 \cdot g_2$, y también como $g = g_1' \cdot g_2'$, donde $g_1, g_1' \in G_1$ y $g_2, g_2' \in G_2$, entonces $(g_1')^{-1} \cdot g_1 = g_2' \cdot g_2^{-1} = e$, de donde resulta que la descomposición es única.

es un automorfismo.

Un **endomorfismo** es un automorfismo definido mediante la conjugación por un elemento fijo del grupo,

$$\phi_a : G \leftrightarrow G \mid \phi_a(g) = a \cdot g \cdot a^{-1}, \ \forall\, g \in G \,. \tag{1.9.2}$$

El conjunto de los endomorfismos sobre G, End(G), forma un subgrupo del grupo de los automorfismos, que resulta ser homomorfo al propio grupo G. En efecto,

$$\begin{aligned}(\phi_a \circ \phi_b)(g) = \phi_a\left(\phi_b(g)\right) = \phi_a\left(b \cdot g \cdot b^{-1}\right) = \\ = \phi_a(b) \cdot \phi_a(g) \cdot \phi_a(b^{-1}) = a \cdot b \cdot g \cdot b^{-1} \cdot a^{-1} = \\ = (a \cdot b) \cdot g \cdot (a \cdot b)^{-1} = \phi_{a \cdot b}(g), \ \forall\, g \in G \,.\end{aligned} \tag{1.9.3}$$

Por lo tanto $\phi_a \circ \phi_b = \phi_{a \cdot b}$ y la aplicación $\Phi : G \to \text{End}(G)$ tal que $\Phi(a) = \phi_a$ es un homomorfismo: $\Phi(a \cdot b) = \phi_{a \cdot b} = \phi_a \circ \phi_b = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$. En particular, $\Phi(e) = \phi_e$, la identidad en el grupo de automorfismos.

El núcleo de este homomorfismo, $\Phi^{-1}\left(\phi_e\right)$, está constituido por los elementos de G para los cuales $\Phi(a) = \phi_a = \phi_e$, es decir, tales que

$$\phi_a(g) = a \cdot g \cdot a^{-1} = \phi_e(g) = g \Rightarrow a \cdot g = g \cdot a, \ \forall\, g \in G \,. \tag{1.9.4}$$

Esto corresponde al **centro** del grupo G, es decir, al conjunto C de aquellos elementos que conmutan con todo otro elemento de G.

Por ser el núcleo de un homomorfismo $\Phi : G \to \text{End}(G)$, C es un subgrupo invariante de G y End(G) es isomorfo a G/C (ver Teorema 1.4).

1.10. Espacios clásicos

En lo que sigue estaremos interesados en representaciones matriciales de grupos, es decir, en homomorfismos con grupos de operadores lineales definidos sobre espacios de dimensión finita.

En un espacio euclídeo de dimensión n, $\mathbf{E}$, generado por la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, los vectores tienen desarrollos de la forma

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \,, \quad y = \sum_{k=1}^{n} y_k\, e_k \,, \tag{1.10.1}$$

y el producto escalar (hermítico y positivo definido) puede escribirse como

$$(x, y) = \sum_{k,l=1}^{n} x_k^*\, (e_k, e_l)\, y_l = \sum_{k,l=1}^{n} x_k^*\, g_{kl}\, y_l \,, \tag{1.10.2}$$

donde $g_{kl} = (e_k, e_l) = g^*_{lk}$.

En esas condiciones, la **métrica** del espacio $g = (g_{kl})$ define sobre $\mathbb{C}^n$ una *forma cuadrática, sesquilineal y positiva definida (hermítica)*[7],

$$\overline{x}^\dagger g\,\overline{y} = (x, y) = \left(\overline{y}^\dagger g\,\overline{x}\right)^*, \tag{1.10.3}$$

donde $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{C}^n$ tienen por componentes a los coeficientes de Fourier en (1.10.1).

Como la métrica es una matriz *autoadjunta*, $g^\dagger = g$, ella puede ser diagonalizada para ser llevada a la forma $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, con los $\lambda_k > 0$. Un cambio adecuado en las escalas de los vectores de la base permite reducirla a la matriz identidad, $g = \mathbf{1_n}$ (lo que corresponde a adoptar una base ortonormal para $\mathbf{E}$).

En el caso de espacios euclídeos reales, la métrica g define sobre $\mathbb{R}^n$ una *forma bilineal, simétrica y positiva definida*,

$$\overline{x}^t\, g\,\overline{y} = (x, y) = \overline{y}^t\, g\,\overline{x}\,, \tag{1.10.4}$$

donde $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ y $g^t = g$.

Ahora bien, en la Física también tienen aplicación espacios lineales más generales que los espacios euclídeos. Por ejemplo, el espacio de Minkowski[8] $\mathbf{M}_4$, que es un espacio real con métrica regular y simétrica pero no positiva definida, $g = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

Un espacio $\mathbf{E}$ dotado de un producto interior *hermítico* y *no degenerado*[9] que no es positivo definido es llamado **pseudo-euclídeo**. También en este caso puede elegirse una base para $\mathbf{E}$ formada por vectores *unitarios* ortogonales, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ con $(e_k, e_l) = 0$, para $k \neq l$. Pero como la *norma* no es positiva definida se tiene que

$$(e_k, e_l) = (e_l, e_k)^* = g_{kl} = \begin{cases} +\delta_{kl}, \; 1 \leq k \leq p\,, \\ -\delta_{kl}, \; p+1 \leq k \leq p+q = n\,, \end{cases} \tag{1.10.5}$$

donde el par de enteros $\langle p, q \rangle$, cuya suma es la dimensión de $\mathbf{E}$, es la **signatura** del espacio. Esta signatura es una propiedad del espacio y no depende de la elección de un sistema *ortonormal* en $\mathbf{E}$.

La métrica de los espacios pseudo-euclídeos, dada por la matriz regular autoadjunta $g = (g_{kl}) = g^\dagger$, define una forma hermítica sobre $\mathbb{C}^n$ que no es positiva definida:

$$\overline{x}^\dagger g\,\overline{y} = (x, y) = \left(\overline{y}^\dagger g\,\overline{x}\right)^*. \tag{1.10.6}$$

---

[7]Charles Hermite (1822 - 1901).

[8]Hermann Minkowski (1864 -1909).

[9]Una forma cuadrática se dice **no degenerada** si $f(x, y) = 0, \forall y \in \mathbf{E} \Rightarrow x = \mathbf{0}$.

En estos espacios existen vectores no nulos que tienen *norma nula* (por ejemplo, los vectores *tipo luz* del espacio de Minkowski).

En espacios pseudo-euclídeos reales de dimensión n, la métrica $g = g^t$ es una matriz regular real y simétrica que define sobre $\mathbb{R}^n$ una *forma cuadrática bilineal simétrica* no positiva definida,

$$\overline{x}^t g\, \overline{y} = (x, y) = \overline{y}^t g\, \overline{x}\,. \tag{1.10.7}$$

Si en un espacio lineal (real o complejo) se tiene un producto interior *no degenerado bilineal y antisimétrico*,

$$(a\, x, b\, y) = a\, b\, (x, y)\,, \quad (x, y) = -\,(y, x)\,, \tag{1.10.8}$$

se está en presencia de un **espacio simpléctico**.

Se puede mostrar (ver más adelante) que estos espacios tienen dimensión par $(2n)$ y que en ellos siempre puede seleccionarse un sistema completo de vectores *unitarios* de la forma (*base de Darboux*) $\{e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$ que satisfacen

$$\begin{aligned} &(e_k, e_l) = 0 = (f_k, f_l)\,, \\ &(e_k, f_l) = \delta_{kl} = -(f_l, e_k)\,, \end{aligned} \tag{1.10.9}$$

para $k, l = 1, 2, \dots, n$. Desarrollando los vectores respecto de esa base tenemos

$$(x, y) = \overline{x}^t g\, \overline{y} = -\overline{y}^t g\, \overline{x}\,, \tag{1.10.10}$$

donde la métrica

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1_n} \\ -\mathbf{1_n} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = -g^t \tag{1.10.11}$$

define una *forma bilineal antisimétrica* sobre $\mathbb{R}^{2n}$ ó $\mathbb{C}^{2n}$, según el caso.

Todo vector de un espacio simpléctico tiene *norma nula*,

$$\overline{x}^t g\, \overline{x} = -\overline{x}^t g\, \overline{x} = 0\,. \tag{1.10.12}$$

1.11. Operadores isométricos

Un operador lineal que conserva los productos interiores en un espacio clásico $\mathbf{E}$,

$$(\mathbf{A}\, x, \mathbf{A}\, y) = (x, y)\,,\ \forall\, x, y \in \mathbf{E}\,, \tag{1.11.1}$$

se dice **isométrico**.

Un operador isométrico es llamado **unitario, pseudo-unitario o simpléctico** según que el espacio sea euclídeo, pseudo-euclídeo o simpléctico respectivamente.

De la definición del operador adjunto en espacios de dimensión finita tenemos que

$$(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}\, x, y) = (\mathbf{A}\, x, \mathbf{A}\, y) = (x, y)\,,\ \forall\, x, y \in \mathbf{E}\,, \tag{1.11.2}$$

de donde resulta que $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$ (dado que, en este caso, el inverso a izquierda lo es también a derecha).

El conjunto de los operadores isométricos (o **isometrías**) sobre un espacio $\mathbf{E}$ forma un grupo respecto de la composición usual de operadores. En efecto, tenemos que

a) el operador identidad es una isometría,

b) cada isometría tiene una inversa dada por su adjunto, que es también isométrico:

$$\left(\mathbf{A}^\dagger x, \mathbf{A}^\dagger y\right) = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger x, \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger y\right) = (x, y)\,,\ \forall x, y \in \mathbf{E}\,, \tag{1.11.3}$$

c) si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son isométricos, entonces $\mathbf{AB}$ es también una isometría:

$$\begin{aligned} \left((\mathbf{AB})\, x, (\mathbf{AB})\, y\right) = \left(\mathbf{A}(\mathbf{B}\, x), \mathbf{A}(\mathbf{B}\, y)\right) = \\ = (\mathbf{B}\, x, \mathbf{B}\, y) = (x, y)\,,\ \forall x, y \in \mathbf{E}\,. \end{aligned} \tag{1.11.4}$$

Referido a una base de $\mathbf{E}$, el operador $\mathbf{A}$ está descrito por una matriz $\mathcal{A} = (A_{kl})$. Si la métrica es hermítica, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\, x, \mathbf{A}\, y) = (A_{ki}\, x_i)^*\, g_{kl}\, (A_{lj}\, y_j) = \\ = \overline{x}^\dagger\, \mathcal{A}^\dagger\, g\, \mathcal{A}\, \overline{y} = \overline{x}^\dagger\, g\, \overline{y},\ \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{C}^n\ (\text{ó } \mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathcal{A}^\dagger\, g\, \mathcal{A} = g\,, \end{aligned} \tag{1.11.5}$$

En consecuencia, las isometrías *preservan* la métrica del espacio. En términos de la matriz adjunta, la inversa está dada por $\mathcal{A}^{-1} = g^{-1}\, \mathcal{A}^\dagger\, g$.

De esa relación se deduce inmediatamente que

$$\det\left(\mathcal{A}^\dagger\, g\, \mathcal{A}\right) = \det \mathcal{A}^\dagger\ \det g\ \det \mathcal{A} = \det g \neq 0 \Rightarrow |\det \mathcal{A}|^2 = 1\,, \tag{1.11.6}$$

es decir, $\det \mathcal{A} = e^{i\theta}$ si el espacio es complejo, o $\det \mathcal{A} = \pm 1$ si el espacio es real.

Si la métrica es bilineal y antisimétrica,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\, x, \mathbf{A}\, y) = (A_{ki}\, x_i)\, g_{kl}\, (A_{lj}\, y_j) = \\ = \overline{x}^t\, \mathcal{A}^t\, g\, \mathcal{A}\, \overline{y} = \overline{x}^t\, g\, \overline{y},\ \forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{C}^n\ (\text{ó } \mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathcal{A}^t\, g\, \mathcal{A} = g\,. \end{aligned} \tag{1.11.7}$$

También en los espacios simplécticos las isometrías preservan la métrica. La matriz inversa está dada en este caso por $\mathcal{A}^{-1} = g^{-1}\, \mathcal{A}^t\, g$.

En particular, el operador correspondiente a la matriz $\mathcal{M} = g^{-1}\, g^t$ es una isometría en los espacios simplécticos. En efecto,

$$\mathcal{M}^t\, g\, \mathcal{M} = g\, \left(g^{-1}\right)^t g\, g^{-1}\, g^t = g\,. \tag{1.11.8}$$

Esta matriz es también **unimodular**,

$$\det \mathcal{M} = \det\left(g^{-1} g^t\right) = (\det g)^{-1} \det g = 1\,. \tag{1.11.9}$$

Pero como la métrica es antisimétrica, $\mathcal{M} = g^{-1} g^t = -g^{-1} g = -\mathbf{1}_{\dim \mathbf{E}} \Rightarrow \det \mathcal{M} = (-1)^{\dim \mathbf{E}}$. En consecuencia, la dimensión de los espacios simplécticos es necesariamente par.

Por otra parte,

$$\det\left(\mathcal{A}^t\, g\, \mathcal{A}\right) = (\det \mathcal{A})^2 \det g = \det g \neq 0 \Rightarrow (\det \mathcal{A})^2 = 1\,, \tag{1.11.10}$$

pero en este caso se puede mostrar que $\det \mathcal{A} = 1$. En efecto, dada

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1.11.11}$$

donde A, B, C, D son matrices de $n \times n$ cuyos elementos toman valores en el cuerpo $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, tenemos que (respecto de la base de Darboux)

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{1.11.12}$$

y, en consecuencia,

$$A^t D - C^t B = \mathbf{1}_n\,, \quad A^t C = C^t A\,, \quad B^t D = D^t B\,. \tag{1.11.13}$$

Supongamos ahora que A es regular. La **descomposición de Schur**[10] nos permite escribir

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \\ C A^{-1} & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D - C A^{-1} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & A^{-1} B \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}, \tag{1.11.14}$$

donde $D - CA^{-1}B$ es el **complemento de Schur** de A en $\mathcal{A}$. Evidentemente,

$$\det \mathcal{A} = \det A \times \det\left(D - CA^{-1}B\right)\,. \tag{1.11.15}$$

Ahora bien, de (1.11.13) resulta que

$$C^t = A^t C A^{-1}\,, \quad A^t \left(D - CA^{-1}B\right) = \mathbf{1}_n\,, \tag{1.11.16}$$

dado que $CA^{-1} = \left(CA^{-1}\right)^t$, lo que implica que

$$\det A^t \times \det\left(D - CA^{-1}B\right) = \det \mathcal{A} = 1\,. \tag{1.11.17}$$

Finalmente, nótese que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (-1)^{n^2} \det \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}, \tag{1.11.18}$$

[10] Issai Schur (1875 -1941).

de modo que en la descomposición (1.11.15) puede emplearse el complemento de Schur de cualquiera de sus bloques (siempre que sea invertible).

1.12. Principales grupos de matrices

Ya hemos mencionado anteriormente al **grupo general lineal** $GL(n, \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$, formado por las matrices (reales o complejas) regulares de $n \times n$, y a su **subgrupo especial lineal** $SL(n, \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$, de matrices unimodulares.

De acuerdo a los resultados de la sección anterior, podemos introducir distintos grupos de isometrías como subgrupos de los anteriores que preservan la correspondiente forma cuadrática.

En un espacio euclídeo complejo de dimensión n y métrica $g = \mathbf{1_n}$, las matrices **unitarias**, que satisfacen $U^\dagger U = \mathbf{1_n}$, forman el grupo $U(n)$. Esa relación impone $n + 2\,n(n-1)/2 = n^2$ condiciones sobre sus n^2 elementos complejos, lo que reduce a n^2 el número de sus parámetros reales independientes. Si $U \in U(n) \Rightarrow |\det U| = 1$.

Este grupo contiene un subgrupo (invariante) unimodular $SU(n)$, formado por las matrices unitarias de determinante igual a 1, cuyos elementos están identificados por $n^2 - 1$ parámetros reales (ya que tomar $\det U = 1$ corresponde a eliminar un parámetro real).

En un espacio euclídeo real de dimensión n, el conjunto de las matrices **ortogonales** de $n \times n$, que satisfacen $R^t R = \mathbf{1_n}$, conforman el grupo $O(n)$. Esa igualdad impone $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ condiciones sobre sus n^2 elementos reales, de modo que estas matrices quedan especificadas por $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$ parámetros reales. Si $R \in O(n) \Rightarrow \det R = \pm 1$.

Este grupo contiene un subgrupo (invariante) $SO(n)$, formado por las matrices ortogonales de determinante igual a 1, cuyos elementos también dependen de $n(n-1)/2$ parámetros reales (ya que, en este caso, seleccionar $\det R = 1$ no corresponde a eliminar un parámetro continuo).

En el caso de espacios pseudo-euclídeos con métrica

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{1_p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1_q} \end{pmatrix}, \qquad (1.12.1)$$

el grupo de isometrías corresponde al de las matrices **pseudo-unitarias** $U(p,q)$ o **pseudo-ortogonales** $O(p,q)$, según sea el espacio complejo o real,

$$\begin{aligned} U^\dagger g\, U = g &\Rightarrow |\det U| = 1\,, \\ R^t g\, R = g &\Rightarrow \det R = \pm 1\,. \end{aligned} \qquad (1.12.2)$$

Esos grupos contienen subgrupos unimodulares invariantes, denotados por $SU(p,q)$ y $SO(p,q)$ respectivamente. En cada caso, el número de parámetros independientes resulta de un razonamiento similar al anteriormente empleado.

Por su parte, en un espacio simpléctico (real o complejo) de dimensión $2n$ con métrica

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1_n} \\ -\mathbf{1_n} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{1.12.3}$$

el grupo de isometrías corresponde al grupo de matrices **simplécticas** $Sp(2n, \mathbb{R}\text{ ó }\mathbb{C})$, que satisfacen $M^t\, g\, M = g$, las que (como se dijo) tienen determinante $\det M = 1$. Puesto que ambos miembros de esa igualdad son matrices antisimétricas, ella corresponde a la imposición de $2n(2n-1)/2$ condiciones (reales o complejas, según el caso). En consecuencia, el número de parámetros independientes (reales o complejos, según el caso) es $(2n)^2 - 2n(2n-1)/2 = 2n^2 + n = n(2n+1)$.

En el espacio de n-uplas de *cuaterniones*[11], $\mathbb{H}^n$, se define el grupo (hiper)unitario $U(n,\mathbb{H})$ cuyos elementos son matrices de cuaterniones que preservan la métrica $\mathbf{1}_n$. Este grupo se puede identificar con un subgrupo de $Sp(2n,\mathbb{C})$ definido como la intersección $Sp(n) := U(2n) \cap Sp(2n,\mathbb{C})$. Se puede mostrar que estas matrices, de dimensión $2n \times 2n$, quedan especificadas mediante un conjunto de $n(2n+1)$ parámetros reales.

Finalmente, señalemos que la **aplicación exponencial** de una matriz B se define por la serie

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}, \tag{1.12.4}$$

la cual converge en el sentido de la norma de los operadores.

Entonces, si $A = A^\dagger$ es una matriz autoadjunta, entonces e^{iA} es unitaria. En efecto, $\left(e^{iA}\right)^\dagger = e^{(iA)^\dagger} = e^{-iA^\dagger} = e^{-iA} = \left(e^{iA}\right)^{-1}$.

Similarmente, si $K = -K^t$ es real y antisimétrica, entonces e^K es una matriz ortogonal: $\left(e^K\right)^t = e^{-K} = \left(e^K\right)^{-1}$.

Por otra parte, si e^B es una matriz simpléctica de dimensión $2n \times 2n$, teniendo en cuenta que $(ig)^2 = \mathbf{1}_{2n}$, tenemos que

$$e^{B^t} = -ge^{-B}g = e^{-(ig)B(ig)} = e^{gBg} \quad \Rightarrow \quad B^t = gBg\,. \tag{1.12.5}$$

[11]Cuaterniones: generalización de los números complejos introducida por William R. Hamilton (1805 - 1865) e, independientemente, por Benjamin O. Rodrigues (1795 - 1851). Ese conjunto es un espacio lineal generado por cuatro elementos, $\{1, i, j, k\}$, que satisfacen las relaciones $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Bibliografía:

- H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symmétries des Particules Elémentaires.* Gordon and Breach, New York, 1967.
- M. Hammermesh, *Group Theory and its Applications to Physical Problems.* Courier Dover Publications, 1989.
- J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Academic Press, 1984.
- Brian C. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*, Springer, 2003.

Capítulo 2

REPRESENTACIONES MATRICIALES EN MECÁNICA CUÁNTICA

2.1. El caso de una partícula en un potencial par

Consideremos una partícula cuántica que se desplaza en una línea recta bajo la influencia de un potencial par, $V(-x) = V(x)$.

El operador Hamiltoniano[1] de ese sistema es

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \tag{2.1.1}$$

definido sobre el subespacio denso $\mathcal{D}(H)$ de las funciones $\psi(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ que tienen una derivada segunda localmente sumable y tales que $H\psi(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$.

Consideremos un *vector de estado* $\psi(x) \in \mathcal{D}(H)$, entonces

$$H\psi(x) = \chi(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}). \tag{2.1.2}$$

Supongamos ahora que preparamos al sistema con la orientación contraria, de modo que su estado esté descrito por el vector $\psi(-x)$. Dado que el potencial es par, podemos referir el operador H al sistema de coordenadas invertido: sea $y = -x$, entonces

$$H_x = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d(-x)^2} + V(-x) = H_y, \tag{2.1.3}$$

de donde resulta que

$$H_x\psi(-x) = H_y\psi(y) = \chi(y) = \chi(-x). \tag{2.1.4}$$

Podemos introducir un operador lineal $\mathcal{P}$ definido sobre todo $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$, que transforma los vectores según

$$\mathcal{P}\psi(x) = \psi(-x). \tag{2.1.5}$$

Nótese que $\mathcal{P} : \mathcal{D}(H) \to \mathcal{D}(H)$.

La ecuación (2.1.5) puede ser interpretada como

$$H\mathcal{P}\psi(x) = \mathcal{P}\chi(x) = \mathcal{P}H\psi(x). \tag{2.1.6}$$

Es decir, $\forall\psi(x) \in \mathcal{D}(H)$, denso en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$, es

$$(\mathcal{P}H - H\mathcal{P})\,\psi(x) = \mathbf{0} \Rightarrow [\mathcal{P}, H] = \mathbf{O}. \tag{2.1.7}$$

[1]William Rowan Hamilton (1805 - 1865).

Teniendo en cuenta que $\mathcal{P}^2\psi(x) = \mathcal{P}\psi(-x) = \psi(x)$, vemos que $\mathcal{P}^2 = I$, es decir, $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$. También se ve fácilmente que $\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$.

En consecuencia, tenemos un grupo de operadores definidos sobre todo $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$,

$$\mathbf{G} = \{I, \mathcal{P}\} \approx \mathbb{Z}_2, \tag{2.1.8}$$

los que conmutan con H en el dominio denso $\mathcal{D}(H)$. Esto corresponde a un **grupo de simetrías** del sistema, puesto que las probabilidades de transición no cambian por la aplicación de esas transformaciones[2]:

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{P}\psi_1, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\mathcal{P}\psi_2\right) &= \left(\psi_1, \mathcal{P}^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\mathcal{P}\psi_2\right) = \\ &= \left(\psi_1, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi_2\right).\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Consideremos ahora un autovector de H (que supondremos no degenerado),

$$H\psi_E(x) = E\psi_E(x). \tag{2.1.12}$$

Como el correspondiente subespacio característico es unidimensional, todo otro autovector correspondiente al mismo autovalor debe ser proporcional a ψ_E. Además, como $\mathcal{P}$ conmuta con H, $\mathcal{P}$ deja invariante ese subespacio característico de H, de modo que

$$H\mathcal{P}\psi_E = \mathcal{P}H\psi_E = E\,\mathcal{P}\psi_E. \tag{2.1.13}$$

En consecuencia, $\mathcal{P}\psi_E(x) = \psi(-x) = c\psi(x)$, donde c es una constante cuyo cuadrado es $c^2 = 1$. Depende del autovector considerado que $c = +1$ o $c = -1$, lo que corresponde al hecho bien conocido de que las autofunciones de Hamiltonianos pares son de paridad definida.

Pero desde el punto de vista de la teoría de grupos, se puede decir que la acción del operador $\mathcal{P}$ en el subespacio característico considerado está *representada* por la multiplicación por $+1$ o por -1. Más precisamente, para aquellos subespacios para los cuales $c = 1$ queda establecido un homomorfismo entre $\mathbf{G}$ y el grupo trivial $\mathbb{Z}_1$, mientras que para aquellos en los cuales $c = -1$ se está en presencia de una representación *fiel* del grupo $\mathbf{G} \approx \mathbb{Z}_2$.

[2] El **operador de evolución** $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\partial_t U(t) = -\frac{i}{\hbar} H U(t)\,, \qquad \text{con } U(0) = I\,. \tag{2.1.9}$$

Si $[\mathcal{P}, H] = \mathbf{O}$ (es decir, si $\mathcal{P}^\dagger H \mathcal{P} = H$) entonces $[\mathcal{P}, U(t)] = \mathbf{O}$. En efecto,

$$\partial_t\left(\mathcal{P}^\dagger U(t)\mathcal{P}\right) = \mathcal{P}^\dagger\left(-\frac{i}{\hbar}HU(t)\right)\mathcal{P} = -\frac{i}{\hbar}H\left(\mathcal{P}^\dagger U(t)\mathcal{P}\right); \tag{2.1.10}$$

y como $\mathcal{P}^\dagger U(0)\mathcal{P} = \mathcal{P}^2 = I$, resulta que $\mathcal{P}^\dagger U(t)\mathcal{P} = U(t)$.

2.2. El caso de una partícula en un potencial central

Consideremos ahora una partícula cuántica en $\mathbb{R}^3$ sometida a la influencia de un potencial central, $V = V(|\mathbf{x}|)$.

El operador Hamiltoniano para este problema es

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m}\triangle_{\mathbf{x}} + V(|\mathbf{x}|), \tag{2.2.1}$$

donde $\triangle_{\mathbf{x}}$ es el Laplaciano[3] en $\mathbb{R}^3$. Su dominio de definición $\mathcal{D}(H)$ es el subespacio de las funciones $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ tales que sus derivadas parciales segundas ${\partial_i}^2\psi(\mathbf{x})$ son localmente sumables y $H\psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$.

Consideremos vector de estado $\psi(x) \in \mathcal{D}(H)$, entonces

$$H\psi(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)\,. \tag{2.2.2}$$

Supongamos ahora que preparamos el sistema con una orientación distinta en el espacio, de modo que su estado esté representado por el mismo vector $\psi(y)$ pero respecto de un sistema de coordenadas rotado respecto del inicial. La relación entre las coordenadas de un mismo punto del espacio en el sistema de coordenadas inicial, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, y en el sistema rotado, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, es lineal: $\mathbf{x} = R\mathbf{y}$, donde R es una matriz real de 3×3. En componentes,

$$x_k = R_{kl}\, y_l. \tag{2.2.3}$$

Una rotación del sistema de coordenadas preserva las distancia entre el punto considerado y el origen, de modo que R es una matriz ortogonal:

$$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = (R\,\mathbf{y}, R\,\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, R^t R\,\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{y}),\ \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \tag{2.2.4}$$

lo que implica que $R^t R = \mathbf{1}_3$. Como R es una función continua de los ángulos de Euler, $\det R = +1$. En consecuencia, $R \in \mathbf{SO}(3)$, con $R^t = R^{-1}$.

La función de onda que describe al sistema físico rotado, referida al sistema de coordenadas inicial, es (suponiendo que se transforma como un *escalar*)

$$\widetilde{\psi}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{y}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x}). \tag{2.2.5}$$

Podemos ahora referir el Hamiltoniano al sistema de referencia rotado, teniendo en cuenta que el potencial es central. En efecto, para $\mathbf{y} = R^{-1}\mathbf{x}$ tenemos por un lado $V(|\mathbf{x}|) = V(|\mathbf{y}|)$, mientras que

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial y_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l} = \left(R^t\right)_{lk}\frac{\partial}{\partial y_l} = R_{kl}\,\frac{\partial}{\partial y_l}\\ \triangle_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_l}\,R_{kl}\,R_{km}\,\frac{\partial}{\partial y_m} = \frac{\partial}{\partial y_l}\,\delta_{km}\,\frac{\partial}{\partial y_m} = \triangle_{\mathbf{y}}.\end{gathered} \tag{2.2.6}$$

[3]Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827).

Entonces,

$$H_{\mathbf{x}}\,\psi(R^{-1}\mathbf{x}) = H_{\mathbf{y}}\,\psi(\mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y}) = \chi(R^{-1}\mathbf{x}). \tag{2.2.7}$$

También en este caso podemos introducir un conjunto de operadores lineales definidos sobre $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ que, para cada $R \in \mathbf{SO}(3)$, transformen los vectores de estado según

$$\mathcal{R}(R)\psi(\mathbf{x}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x}). \tag{2.2.8}$$

Nótese que $\mathcal{R}(R) : \mathcal{D}(H) \to \mathcal{D}(H)$.

En esas condiciones, $\forall\,\psi(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}(H)$ denso en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$, podemos reescribir la eq.(2.2.7) como

$$H\mathcal{R}(R)\psi(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R)\chi(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R)H\psi(\mathbf{x}). \tag{2.2.9}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{R}(R)\,H - H\,\mathcal{R}(R) = [\mathcal{R}(R), H] = \mathbf{O},\ \forall\,R \in \mathbf{SO}(3). \tag{2.2.10}$$

Los operadores lineales $\mathcal{R}(R)$ tienen las siguientes propiedades:

- $\mathcal{R}(R)$ es unitario[4]:

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}(R)\psi, \mathcal{R}(R)\chi) &= \int \psi(R^{-1}\mathbf{x})^*\,\chi(R^{-1}\mathbf{x})\,d^3\mathbf{x} = \\ &= \int \psi(\mathbf{y})^*\,\chi(\mathbf{y})\,(\det R)\;d^3\mathbf{y} = \\ &= (\psi, \chi),\ \forall\,\psi, \chi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3),\ \text{ y } \forall\,R \in \mathbf{SO}(3).\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

[4]El dominio de $\mathcal{R}(R)$ es todo $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ y, en particular, $\mathcal{R}(R)$ preserva las normas,

$$\parallel \mathcal{R}(R)\psi \parallel^2 = (\mathcal{R}(R)\psi, \mathcal{R}(R)\psi) = (\psi, \psi) = \parallel \psi \parallel^2 .$$

Su rango es todo el espacio de Hilbert, pues $\forall\,\psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(R\;R^{-1}\;\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R)\chi(\mathbf{x}),\ \text{ con } \chi(\mathbf{x}) = \psi(R\;\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3),$$

y también es inyectivo ya que

$$\mathcal{R}(R)\psi(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R)\chi(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathcal{R}(R)\,(\psi(\mathbf{x}) - \chi(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \Rightarrow (\psi(\mathbf{x}) - \chi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}.$$

Entonces, $\mathcal{R}(R)$ es una biyección de $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ en todo $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ con inversa acotada. Además, por ser acotado, su adjunto está definido en todo $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ y coincide con su inversa, $\mathcal{R}^\dagger(R) = \mathcal{R}^{-1}(R)$. En efecto, $\forall\,\psi, \chi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ tenemos que

$$(\psi, \chi) = (\mathcal{R}(R)\psi, \mathcal{R}(R)\chi) = (\mathcal{R}^\dagger(R)\mathcal{R}(R)\psi, \chi) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}^\dagger(R)\mathcal{R}(R) = I\,.$$

Y como $\text{Rank}(\mathcal{R}(R)) = \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$, $\forall \psi, \chi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ existen $\widetilde{\psi}, \widetilde{\chi} \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ tales que $\psi = \mathcal{R}(R)\widetilde{\psi}, \chi = \mathcal{R}(R)\widetilde{\chi}$, de modo que

$$(\psi, \mathcal{R}(R)\mathcal{R}^\dagger(R)\chi) = (\mathcal{R}(R)\widetilde{\psi}, \mathcal{R}(R)\mathcal{R}^\dagger(R)\mathcal{R}(R)\widetilde{\chi}) = (\psi, \chi) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(R)\mathcal{R}^\dagger(R) = I\,.$$

• El conjunto de los operadores $\mathcal{R}(R)$, con $R \in \mathbf{SO}(3)$, se estructura (respecto de la composición usual de operadores sobre un espacio de Hilbert[5]) como un grupo isomorfo a $\mathbf{SO}(3)$. En efecto, sean $R_1 R_2 = R_3$, entonces, $\forall\, \psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(R_1)\mathcal{R}(R_2)\psi(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R_1)\left(\mathcal{R}(R_2)\psi(\mathbf{x})\right) = \\ = \mathcal{R}(R_1)\psi(R_2^{-1}\mathbf{x}) = \psi(R_2^{-1}R_1^{-1}\mathbf{x}) = \\ = \psi((R_1R_2)^{-1}\mathbf{x}) = \psi(R_3^{-1}\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R_3)\psi(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}(R_1)\mathcal{R}(R_2) = \mathcal{R}(R_1R_2),\ \forall\, R_1, R_2 \in \mathbf{SO}(3).$$

Por lo tanto, el grupo de operadores es homomorfo a $\mathbf{SO}(3)$ (constituye una **representación lineal** de $\mathbf{SO}(3)$). Pero la relación entre ambos grupos es uno a uno. En efecto, si $\mathcal{R}(R_1) = \mathcal{R}(R_2)$ entonces, *para todo* $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ se tiene que

$$\mathcal{R}(R_1)\psi(\mathbf{x}) = \psi(R_1^{-1}\mathbf{x}) = \psi(R_2^{-1}\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R_2)\psi(\mathbf{x}), \tag{2.2.13}$$

y eso es posible sólo si $R_1 = R_2$. En consecuencia, el grupo de operadores así obtenido, que actúa sobre un espacio de funciones escalares a valores en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$, es *isomorfo* al grupo de rotaciones en el espacio, $\mathbf{SO}(3)$. En particular, $\mathcal{R}(\mathbf{1}_3) = I$ y $\mathcal{R}(R^{-1}) = \mathcal{R}^\dagger(R)$.

Dado que los operadores $\mathcal{R}(R)$ son unitarios y conmutan con el Hamiltoniano H, se trata de un **grupo de simetrías** del sistema cuántico. En efecto, las transformaciones que producen preservan las probabilidades de transición entre estados[6],

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{R}(R)\psi, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\mathcal{R}(R)\chi\right) = \left(\mathcal{R}(R)\psi, \mathcal{R}(R)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\chi\right) = \\ \left(\mathcal{R}^\dagger(R)\mathcal{R}(R)\psi, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\chi\right) = \left(\psi, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\chi\right). \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Consideremos ahora el subespacio característico correspondiente al autovalor E de H. En general, será degenerado con degeneración finita n. Entonces podemos seleccionar un conjunto de n autovectores linealmente independientes correspondientes al autovalor$E$, que generan ese subespacio:

$$H\psi_E^k(\mathbf{x}) = E\psi_E^k(\mathbf{x}),\ \text{con } k = 1, 2, ..., n. \tag{2.2.15}$$

[5]David Hilbert (1862 - 1943).

[6]Aquí también, de la ecuación de Schrödinger (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887 - 1961)) se deduce que si $\mathcal{R}^\dagger(R)H\mathcal{R}(R) = H$ entonces $\mathcal{R}^\dagger(R)U(t)\mathcal{R}(R) = U(t)$, donde $U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)$ es el operador de evolución del sistema cuántico. Ver Nota al pie en página 38.

Todo autovector de ese subespacio característico de H se puede expresar como una combinación lineal de los $\psi_E^k(\mathbf{x})$. Por otra parte, los operadores $\mathcal{R}(R)$ dejan invariante a ese subespacio, puesto que conmutan con el Hamiltoniano. En consecuencia, para cada $R \in \mathbf{SO}(3)$ y para cada $k = 1, ..., n$,

$$\mathcal{R}(R)\psi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n} \psi_E^l(\mathbf{x})\mathrm{D}_{lk}(R), \tag{2.2.16}$$

con ciertos coeficientes $\mathrm{D}_{lk}(R)$ que dependen de la rotación considerada R.

Por aplicación sucesiva de las transformaciones en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ asociadas a dos rotaciones, $R_1, R_2 \in \mathbf{SO}(3)$, obtenemos

$$\mathcal{R}(R_1)\mathcal{R}(R_2)\psi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n} \mathcal{R}(R_1)\psi_E^l(\mathbf{x})\mathrm{D}_{lk}(R_2) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \psi_E^m(\mathbf{x})\mathrm{D}_{ml}(R_1)\mathrm{D}_{lk}(R_2). \tag{2.2.17}$$

Pero también es

$$\mathcal{R}(R_1)\mathcal{R}(R_2)\psi_E^k(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R_1R_2)\psi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{n} \psi_E^m(\mathbf{x})\mathrm{D}_{mk}(R_1R_2). \tag{2.2.18}$$

Y como los $\psi_E^m(\mathbf{x})$ son linealmente independientes, resulta

$$\sum_{l=1}^{n} \mathrm{D}_{ml}(R_1)\mathrm{D}_{lk}(R_2) = \mathrm{D}_{mk}(R_1R_2), \tag{2.2.19}$$

o bien, definiendo matrices $\mathrm{D}(R)$ de dimensión $n \times n$ cuyos elementos son los coeficientes $\mathrm{D}_{lk}(R)$,

$$\mathrm{D}(\mathrm{R}_1)\mathrm{D}(R_2) = \mathrm{D}(R_1R_2). \tag{2.2.20}$$

En consecuencia, el conjunto de matrices $\mathrm{D}(R)$ conforman un grupo homomorfo a $\mathbf{SO}(3)$. Es decir, constituyen una **representación matricial** de $\mathbf{SO}(3)$, cuyas matrices describen la acción de los operadores $\mathcal{R}(R)$ en el subespacio característico correspondiente al autovalor E.

Las anteriores consideraciones imponen (en el caso general) restricciones sobre los subespacios de degeneración de los autovalores del Hamiltoniano, pues establecen que deben ser **espacios de representación** de los grupos de simetría del sistema físico considerado (es decir, espacios en los que sea posible construir una representación matricial de esos grupos).

En efecto, no es *a-priori* evidente que dado un cierto grupo pueda construirse una representación matricial de una dimensión arbitraria (más adelante veremos que las dimensiones de las representaciones matriciales **irreducibles** del grupo $\mathbf{SO}(3)$ son impares, $n = 2j + 1$, con $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

En ese sentido, el conocimiento de las representaciones matriciales del grupo de simetrías de un Hamiltoniano permite prever, en alguna medida, el grado de degeneración de sus autovalores (es esperable que en el espectro de H se den diversas representaciones matriciales de esos grupos).

Volviendo al ejemplo anterior, señalemos que la elección de una base en el subespacio característico correspondiente al autovalor E de H es arbitraria. Supongamos que adoptamos un nuevo sistema completo de n autofunciones de H,

$$H\chi_E^k(\mathbf{x}) = E\chi_E^k(\mathbf{x}), \text{con } k = 1, 2, ..., n. \tag{2.2.21}$$

relacionadas con las anteriores por

$$\psi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n} \chi_E^l(\mathbf{x}) A_{lk}, \tag{2.2.22}$$

donde la matriz $A = (A_{lk})$ es regular. Entonces, la relación inversa es

$$\chi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n} \psi_E^l(\mathbf{x}) A_{lk}^{-1}. \tag{2.2.23}$$

La acción de los operadores $\mathcal{R}(R)$ sobre los vectores de la nueva base es

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(R)\chi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n} \mathcal{R}(R)\psi_E^l(\mathbf{x}) A_{lk}^{-1} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \psi_E^m(\mathbf{x}) \mathrm{D}_{ml}(R) A_{lk}^{-1} = \\ = \sum_{p=1}^{n} \chi_E^p(\mathbf{x}) \sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_{pm} \mathrm{D}_{ml}(R) A_{lk}^{-1}.\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

Pero definiendo matrices D' como se hizo antes, también tenemos

$$\mathcal{R}(R)\chi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{n} \chi_E^p(\mathbf{x}) \mathrm{D'}_{pk}(R), \tag{2.2.25}$$

de modo que las matrices de la nueva representación matricial se obtienen de las anteriores por una transformación de similitud:

$$\mathrm{D}'(R) = A\mathrm{D}(R)A^{-1}, \ \forall R \in \mathbf{SO}(3), \tag{2.2.26}$$

donde A no depende de R. Nótese que ambas representaciones describen *la misma transformación de vectores* en el subespacio característico del autovalor E, pero referidas a dos bases distintas.

Dos representaciones matriciales que pueden obtenerse una de la otra por una transformación de similitud se dicen **equivalentes**.

También es posible elegir un sistema ortonormal como base del subespacio considerado. En ese caso,

$$(\psi_E^k(\mathbf{x}), \psi_E^l(\mathbf{x})) = \delta_{kl}. \tag{2.2.27}$$

Y como los operadores de la representación lineal de $\mathbf{SO}(3)$ antes construida son unitarios,

$$\begin{aligned} \delta_{kl} = (\mathcal{R}(R)\psi_E^k(\mathbf{x}), \mathcal{R}(R)\psi_E^l(\mathbf{x})) = \\ = (\sum_{p=1}^n \psi_E^p(\mathbf{x})\mathrm{D}_{pk}(R), \sum_{q=1}^n \psi_E^q(\mathbf{x})\mathrm{D}_{ql}(R)) = \\ = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \mathrm{D}_{pk}(R)^*(\psi_E^p(\mathbf{x}), \psi_E^q(\mathbf{x}))\mathrm{D}_{ql}(R) = \\ = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \mathrm{D}_{pk}(R)^*\delta_{pq}\mathrm{D}_{ql}(R) = \sum_{p=1}^n \mathrm{D}_{pk}(R)^*\mathrm{D}_{pl}(R), \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

es decir, las matrices $\mathrm{D}(R)$ son unitarias,

$$\mathrm{D}^\dagger(R)\mathrm{D}(R) = \mathbf{1}_n, \ \forall R \in \mathbf{SO}(3). \tag{2.2.29}$$

En consecuencia, referida a una base ortonormal, la representación obtenida es *unitaria.*

Señalemos finalmente que, como $[\mathcal{R}(R), H] = \mathbf{O}$, aquellos observables que se expresen como función de los operadores $\mathcal{R}(R)$ únicamente son **constantes de movimiento**, de modo que cada grupo de simetrías tiene asociado un cierto número de magnitudes conservadas.

En el subespacio característico correspondiente al autovalor E, que es invariante frente al grupo de transformaciones, esos observables se expresan en términos de las matrices $\mathrm{D}(R)$ únicamente. De ese modo, de ellas depende un cierto conjunto de números cuánticos adicionales que permiten distinguir entre los diversos autovectores de H correspondientes al mismo autovalor E.

2.3. Grupos de simetrías

Desde un punto de vista más general, diremos que una operación que se realiza sobre un sistema físico (que no necesariamente involucra un cambio de coordendas) es una **operación de simetría** si ella no afecta el resultado de las mediciones que se efectúen sobre el sistema. Cuando estas operaciones se estructuren como un grupo hablaremos de **grupo de simetrías**.

En Mecánica Cuántica, a cada estado de un sistema físico le corresponde un vector de norma 1 en un espacio de Hilbert, $\psi \in \mathcal{H}$, definido a menos de una fase arbitraria. Frente a una operación de simetría sobre el sistema físico el vector de estado cambia según $\psi \to \psi' \in \mathcal{H}$. Podemos pensar que esa transformación es efectuada por la aplicación de un operador $\mathcal{U}$ definido sobre $\mathcal{H}$, que establece la correspondencia $\psi' = \mathcal{U}\,\psi$.

Ahora bien, si se trata de una simetría, esa transformación no afecta las probabilidades de transición entre estados, de modo que $\mathcal{U}$ debe preservar los módulos de los productos escalares,

$$|(\chi', \psi')| = |(\mathcal{U}\,\chi, \mathcal{U}\,\psi)| = |(\chi, \psi)|\,, \quad \forall\,\psi, \chi \in \mathcal{H}. \tag{2.3.1}$$

Esa igualdad se satisface trivialmente si $\mathcal{U}$ es un operador *lineal y unitario*, en cuyo caso

$$(\mathcal{U}\,\chi, \mathcal{U}\,\psi) = (\chi, \psi)\,. \tag{2.3.2}$$

Pero no es esa la única posibilidad. Existe un teorema debido a Wigner[7] que establece que siempre es posible elegir las fases (arbitrarias) de los vectores de estado normalizados de modo tal que se dé uno de los siguientes casos,

- $\mathcal{U}$ es lineal y unitario:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\,(a\,\psi + b\,\chi) &= a\mathcal{U}\,\psi + b\mathcal{U}\,\chi, \\ (\mathcal{U}\,\psi, \mathcal{U}\,\chi) &= (\psi, \chi)\,. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

- $\mathcal{U}$ es antilineal y unitario (**antiunitario**)[8]:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\,(a\,\psi + b\,\chi) &= a^*\,\mathcal{U}\,\psi + b^*\,\mathcal{U}\,\chi, \\ (\mathcal{U}\,\psi, \mathcal{U}\,\chi) &= (\psi, \chi)^*\,. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

No obstante, sólo el caso de transformaciones que involucran la inversión temporal están realizadas en términos de operadores antiunitarios. Dejando de lado ese caso muy particular, sólo tendremos que considerar **representaciones lineales** de grupos, es decir, transformaciones del sistema físico realizadas en el espacio de Hilbert en términos de operadores lineales y unitarios.

Consideremos dos elementos de un grupo G, $g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G$. Cada uno de esos elementos tendrá asociado un operador lineal $\mathcal{U}(g)$ sobre $\mathcal{H}$, de modo que por la aplicación sucesiva de dos transformaciones al vector de estado $\psi \in \mathcal{H}$ obtenemos

$$\mathcal{U}(g_1)\mathcal{U}(g_2)\psi = \mathcal{U}(g_1)\big(\mathcal{U}(g_2)\psi\big) = \chi, \tag{2.3.5}$$

[7]Eugene Paul Wigner (1902 - 1995).

[8]El adjunto de un operador antilineal debe ser definido como

$$(\mathcal{U}^\dagger\,\psi, \chi) = (\psi, \mathcal{U}\,\chi)^*\,,$$

de manera consistente con la antilinealidad de $\mathcal{U}$,

$$(\mathcal{U}^\dagger\,\psi, a\,\chi) = a\,(\mathcal{U}^\dagger\,\psi, \chi) = a\,(\psi, \mathcal{U}\,\chi)^* = (\psi, a^*\,\mathcal{U}\,\chi)^* = (\psi, \mathcal{U}\,a\,\chi)^*\,.$$

mientras que aplicando el operador asociado a g_3 (que corresponde a la misma operación física sobre el sistema)

$$\mathcal{U}(g_1 \cdot g_2)\psi = \chi'. \tag{2.3.6}$$

Los vectores χ y χ' representan el mismo estado del sistema físico, por lo que sólo pueden diferir en una fase. Como ψ es un vector arbitrario de $\mathcal{H}$, se concluye que esa fase es independiente de ψ, y sólo puede depender de los elemento g_1 y g_2,

$$\mathcal{U}(g_1 \cdot g_2) = \exp\left(i\alpha(g_1, g_2)\right) \mathcal{U}(g_1)\, \mathcal{U}(g_2). \tag{2.3.7}$$

En consecuencia, a cada operación física sobre el sistema puede corresponder un conjunto de operadores que difieren entre sí en una fase. Si esos factores de fase adicionales no pueden ajustarse todos ellos a 1 eligiendo convenientemente las fases de los operadores $\mathcal{U}(g)$, se dice que se está en presencia de una **representación proyectiva** del grupo de transformaciones.

En el caso de tener representaciones proyectivas, existe un homomorfismo de un grupo de operadores $\overline{G}$ sobre el grupo G de transformaciones consideradas, $\phi : \overline{G} \to G$. En particular, habrá un conjunto de operadores $\mathcal{I} = \left\{I, \exp\left(i\alpha(g, g^{-1})\right)I, ...\right\} \subset \overline{G}$ que sólo difieren de la identidad en una fase y que son aplicados por efecto del homomorfismo en el elemento identidad e de G. Este conjunto, claramente contenido en el centro del grupo $\overline{G}$, constituye el *núcleo* del homomorfismo, $\mathcal{I} = \phi^{-1}(e)$, que es un subgrupo invariante de $\overline{G}$. De la definición de grupo cociente (ver Sección 1.4), ya sabemos que en ese caso G es *isomorfo* a $\overline{G}/\mathcal{I}$ por la correspondencia $g \leftrightarrow \mathcal{U}(g)\mathcal{I}$. Esto es, cada transformación del grupo sobre el sistema físico estará realizada en el espacio de Hilbert de estados del sistema por un conjunto de operadores que difieren entre sí en un factor de fase.

En esas condiciones, el estudio de las representaciones proyectivas de un grupo G se reduce al estudio de las representaciones ordinarias de un grupo más amplio, $\overline{G}$, llamado **grupo de cubrimiento** de G, al cual G es homomorfo.

Del conjunto de las representaciones matriciales del grupo de cubrimiento $\overline{G}$, son representaciones ordinarias del grupo G aquellas que aplican el núcleo $\mathcal{I}$ en la matriz identidad de la representación.

Bibliografía:

- E. Wigner, *Group theory: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra.* Academic Press, New York, 1959.

- Hermann Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Courier Dover Publications, 1950.
- H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symmétries des Particules Elémentaires.* Gordon and Breach, New York, 1967.
- J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Academic Press, 1984.

Capítulo 3

REPRESENTACIONES MATRICIALES DE GRUPOS DE ORDEN FINITO

3.1. Representaciones equivalentes - Caracteres

Consideremos dos copias del espacio $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$, y sea A una matriz regular (de dimensión $n \times n$) que represente una aplicación con inversa entre esos espacios, $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$. Dada una representación matricial de un grupo G establecida sobre el espacio $\mathbf{E}$,

$$D : G \to D(G) = \{D(g) : \mathbf{E} \to \mathbf{E} \,, \forall\, g \in G\} \tag{3.1.1}$$

(donde D es un homomorfismo de G en un grupo de matrices de $n \times n$, $D(G)$), es posible construir una representación matricial de G sobre $\mathbf{E}'$ de modo que

$$D'(G) := \left\{D'(g) = AD(g)A^{-1} : \mathbf{E}' \to \mathbf{E}' \,, \forall\, g \in G\right\} . \tag{3.1.2}$$

En efecto, $\forall\, g_1, g_2 \in G$ tenemos

$$\begin{aligned} D'(g_1)D'(g_2) &= AD(g_1)A^{-1}AD(g_2)A^{-1} = \\ &= AD(g_1 \cdot g_2)A^{-1} = D'(g_1 \cdot g_2) \,. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Dos representaciones de la misma dimensión cuyas matrices se relacionan por una transformación de similitud,

$$D'(g) = AD(g)A^{-1} \,, \forall\, g \in G \,, \text{ con } A \text{ fijo} \,, \tag{3.1.4}$$

se dicen **equivalentes**.

Esto constituye una relación de equivalencia que permite agrupar las representaciones matriciales de un grupo G en **clases de representaciones equivalentes**.

Se llama **carácter** del elemento $g \in G$ en la representación $D(G)$ a la traza de la matriz que lo representa,

$$\chi(g) := \mathrm{tr}\{D(g)\} \,, \text{ con } D(g) \in D(G) \,. \tag{3.1.5}$$

Esta es una propiedad del elemento $g \in G$ en cada clase de representaciones equivalentes. En efecto, los caracteres de un mismo elemento $g \in G$ en dos representaciones equivalente coinciden,

$$\chi'(g) = \mathrm{tr}\{D'(g)\} = \mathrm{tr}\{AD(g)A^{-1}\} = \mathrm{tr}\{D(g)\} = \chi(g) \,, \tag{3.1.6}$$

dada la invarianza de la traza frente a permutaciones cíclicas de las matrices en su argumento.

En particular, el carácter del neutro es la **dimensión de la representación**

$$\chi(e) = \mathrm{tr}\{D(e)\} = \mathrm{tr}\{\mathbf{1}_{\dim \mathbf{E}}\} = \dim \mathbf{E}\,. \qquad (3.1.7)$$

Por otra parte, a elementos conjugados de G les corresponde el mismo carácter en cada clase de representaciones equivalentes de ese grupo. En efecto, si $g' = a \cdot g \cdot a^{-1}$,

$$\begin{array}{c}\chi(g') = \mathrm{tr}\{D(a \cdot g \cdot a^{-1})\} = \mathrm{tr}\{D(a)D(g)D(a^{-1})\} = \\ = \mathrm{tr}\{D(g)\} = \chi(g)\,.\end{array} \qquad (3.1.8)$$

En consecuencia, el número de caracteres diferentes no puede superar al número de clases de elementos conjugados en el grupo (que es finito si el grupo es de orden finito).

Por lo tanto, cada clase de representaciones equivalentes de un grupo G está caracterizada por un conjunto de caracteres, uno por cada clase de elementos conjugados en G.

3.2. Representaciones irreducibles

Dada una representación $D(G)$ de un grupo G sobre un espacio $\mathbf{E}$, un subespacio $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ se dice **invariante** frente a la acción del grupo si, $\forall\, x \in \mathbf{F}$, y $\forall\, g \in G$, es $D(g)\, x \in \mathbf{F}$.

Toda representación deja invariantes a los dos **subespacios impropios**, $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ y $\mathbf{F} = \{\mathbf{0}\}$.

Una representación $D(G)$ se dice **reducible** si deja invariante a algún **subespacio propio** de $\mathbf{E}$. En caso contrario, $D(G)$ se dice **irreducible**.

De esa definición resulta que la representación $D(G)$ es reducible si es posible elegir una base en el espacio de la representación $\mathbf{E}$ de manera tal que las matrices de la representación presenten una estructura en bloques de la forma

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & B(g) \\ \mathbf{O} & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}, \quad \forall\, g \in G\,, \qquad (3.2.1)$$

donde ($\mathbf{O}$ es una matriz nula y) los conjuntos de matrices $\{D^{(1,2)}(g)\,,\ \forall\, g \in G\}$ constituyen representaciones matriciales de G de dimensión menor que $\dim \mathbf{E}$. En

efecto,

$$
\begin{aligned}
D(g_1)D(g_2) &= \begin{pmatrix} D^{(1)}(g_1)D^{(1)}(g_2) & D^{(1)}(g_1)B(g_2) + B(g_1)D^{(2)}(g_2) \\ \mathbf{O} & D^{(2)}(g_1)D^{(2)}(g_2) \end{pmatrix} \\
&= D(g_1 \cdot g_2) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g_1 \cdot g_2) & B(g_1 \cdot g_2) \\ \mathbf{O} & D^{(2)}(g_1 \cdot g_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.2.2}
$$

Una representación reducible se dice **completamente reducible** si todo subespacio invariante de $D(G)$ tiene por complemento ortogonal en $\mathbf{E}$ a otro subespacio invariante.

En este caso, las matrices de la representación pueden ser llevadas a la forma

$$
D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}, \quad \forall\, g \in G\,. \tag{3.2.3}
$$

Más generalmente, una representación completamente reducible puede ser llevada a la forma *diagonal en bloques*

$$
D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & D^{(2)}(g) & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & D^{(\rho)}(g) \end{pmatrix}, \quad \forall\, g \in G\,, \tag{3.2.4}
$$

donde los conjuntos de matrices $\{D^{(\alpha)}(g)\,, g \in G\}$, para $\alpha = 1, 2, \dots, \rho$, son representaciones irreducibles de G.

En ese sentido, se puede decir que la representación completamente reducible $D(G)$ es la *suma directa* de representaciones irreducibles

$$
D(G) = \bigoplus_{\alpha=1}^{\rho} D^{(\alpha)}(G)\,. \tag{3.2.5}
$$

Si entre las representaciones irreducibles que aparecen en el miembro de la derecha de (3.2.5) las hay equivalentes entre sí en número $a_1, a_2, \dots, a_\sigma$, entonces una transformación de similitud (un cambio apropiado de la base de $\mathbf{E}$) hace que aparezcan en el miembro de la derecha de (3.2.4) a_α bloques idénticos, con $\alpha = 1, \dots, \sigma$. En esas condiciones, podemos escribir

$$
D(G) = \bigoplus_{\alpha=1}^{\sigma} a_\alpha\, D^{(\alpha)}(G)\,, \tag{3.2.6}
$$

donde los a_α son enteros positivos.

Ejemplo 3.1. El grupo de rotaciones en el plano, $SO(2)$ tiene la siguiente representación fiel

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \varphi \in [0, 2\pi). \tag{3.2.7}$$

Evidentemente, esa representación es completamente reducible.

En un espacio complejo, resulta inmediato mostrar que todas esa matrices pueden ser *simultáneamente* llevadas a la forma diagonal

$$D'(\varphi) = AD(\varphi)A^{-1} = \mathrm{diag}\left(e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}, 1\right) \tag{3.2.8}$$

mediante una matriz A que no depende de φ. En consecuencia, D puede expresarse como suma directa de tres representaciones (irreducibles) unidimensionales no equivalentes.

Lema 3.1. *Sean $D(G)$ y $D'(G)$ dos representaciones irreducibles no equivalentes del grupo G, definidas sobre los espacios de representación $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$ respectivamente. Entonces, un operador $A : \mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ que satisface*

$$D(g)A = AD'(g)\,, \quad \forall\, g \in G\,, \tag{3.2.9}$$

es necesariamente el operador nulo, $A = \mathbf{O}$.

Primero señalemos que el rango de A, $\mathbf{F} = \mathrm{Rank}(A) \subset \mathbf{E}$, es un subespacio invariante frente a la acción de la representación $D(G)$. En efecto, $\forall\, x \in \mathbf{F}$ existe un $x' \in \mathbf{E}'$ tal que $x = A\,x'$, de modo que

$$D(g)\,x = D(g)A\,x' = AD'(g)\,x' \in \mathbf{F}\,, \quad \forall\, g \in G\,, \tag{3.2.10}$$

dado que $D'(g)\,x' \in \mathbf{E}'$.

Y como, por hipótesis, $D(G)$ es irreducible, $\mathbf{F}$ es un subespacio impropio de $\mathbf{E}$. En particular, si $\mathbf{F} = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow A = \mathbf{O}$.

Supongamos entonces que $\mathbf{F} = \mathbf{E}$, y llamemos $\mathbf{F}'$ al núcleo de A, $\mathbf{F}' = \mathrm{Ker}(A) \subset \mathbf{E}'$.

Para todo vector $x' \in \mathbf{F}'$ y $\forall\, g \in G$ tenemos

$$AD'(g)\,x' = D(g)A\,x' = \mathbf{0} \Rightarrow D'(g)\,x' \in \mathbf{F}'\,, \tag{3.2.11}$$

lo que implica que $\mathbf{F}'$ es un subespacio invariante frente a la acción de $D'(G)$. Y como, por hipótesis, $D'(G)$ es irreducible, entonces $\mathbf{F}'$ es un subespacio impropio de $\mathbf{E}'$. En particular, si $\mathbf{F}' = \mathbf{E}' \Rightarrow A = \mathbf{O}$.

Supongamos entonces que $\mathbf{F}' = \{\mathbf{0}'\}$. En esas condiciones, tenemos que $\text{Rank}(A) = \mathbf{E}$ y $\text{Ker}(A) = \{\mathbf{0}'\}$, es decir, A es una aplicación biunívoca que, en consecuencia, tiene inversa. Pero en ese caso podemos escribir que

$$D(g) = AD'(g)A^{-1}\,, \quad \forall\, g \in G\,, \tag{3.2.12}$$

en contradicción con la hipótesis de que $D(G)$ y $D'(G)$ son representaciones no equivalentes de G.

Por lo tanto, como A no puede ser invertible, debe ser $A = \mathbf{O}$. □

Lema 3.2. *Supongamos ahora que $D(G)$ sea una representación matricial irreducible del grupo G, definida sobre el espacio de representación $\mathbf{E}$ de dimensión n, y supongamos que el operador (matriz de $n \times n$) $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ satisface*

$$D(g)A = AD(g)\,, \quad \forall\, g \in G\,. \tag{3.2.13}$$

En esas condiciones, si $A \neq \mathbf{O}$, entonces A es un múltiplo de la matriz identidad, $A = \lambda\,\mathbf{1}_n$.

Sea $\mathbf{F} = \text{Rank}(A)$. De igual modo que en el Lema anterior, $\mathbf{F}$ es un subespacio invariante frente a la acción de $D(G)$. Como esa representación es irreducible, $\mathbf{F}$ es un subespacio impropio de E. En particular, si $\mathbf{F} = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow A = \mathbf{O}$.

Supongamos entonces que $\mathbf{F} = \mathbf{E}$, y sea $\mathbf{F}' = \text{Ker}(A)$. $\mathbf{F}'$ es también un subespacio invariante frente a $D(G)$ y, por lo tanto, también impropio. En particular, si $\mathbf{F}' = \mathbf{E} \Rightarrow A = \mathbf{O}$.

Por lo tanto, $A \neq \mathbf{O}$ requiere que $\text{Rank}(A) = \mathbf{E}$ y $\text{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$, es decir, que A sea invertible.

Ahora bien, consideremos el polinomio característico de la matriz A, $P(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathbf{1}_n)$, polinomio de grado $\dim E \geq 1$. Sea λ_0 uno de sus ceros, y definamos una nueva matriz $A' = A - \lambda_0\,\mathbf{1}_n$. Resulta inmediato mostrar que

$$D(g)A' = A'D(g)\,, \quad \forall\, g \in G\,, \tag{3.2.14}$$

lo que implica que, o bien A' es invertible, o $A' = \mathbf{O}$.

Pero como, por construcción, A' no es una matriz regular, entonces necesariamente $A' = \mathbf{O} \Rightarrow A = \lambda_0\,\mathbf{1}_n$. □

Los resultados establecidos en los Lemas 3.1 y 3.2 constituyen lo que se conoce como **Lema de Schur** (1905). Una consecuencia inmediata es el siguiente corolario.

Corolario 3.0.1. *Las representaciones irreducibles de un grupo Abeliano son todas unidimensionales.*

En efecto, si G es Abeliano tenemos que

$$D(g)D(g') = D(g')D(g)\,, \quad \forall\, g, g' \in G\,. \tag{3.2.15}$$

Entonces, $D(g) = \lambda(g)\,\mathbf{1}_{\dim \mathbf{E}}$, $\forall\, g \in G$. Y si la representación es irreducible, $\dim \mathbf{E} = 1$. □

3.3. Representaciones unitarias

Una representación lineal $D(G)$ se dice **unitaria** si las matrices de la representación son unitarias,

$$D(g)^\dagger = D(g)^{-1} = D(g^{-1})\,, \quad \forall\, g \in G\,. \tag{3.3.1}$$

Teorema 3.1. *Toda representación matricial de un grupo de orden finito es equivalente a una representación unitaria.*

Sea G un grupo de orden finito, $\#G = n$, y sea $D(G)$ una representación matricial de G de dimensión r. Las matrices de la representación son operadores que actúan sobre elementos del espacio $\mathbf{E} = \mathbb{C}^r$, que es un espacio euclídeo respecto del producto escalar usual de r-úplas complejas,

$$(x, y) = x^\dagger y = \begin{pmatrix} x_1^* & \dots & x_r^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}\,, \quad x, y \in \mathbb{C}^r\,. \tag{3.3.2}$$

Los vectores

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3.3}$$

forman una base ortonormal del espacio $\mathbf{E}$ $\big((e_k, e_l) = \delta_{kl}\big)$, de modo que todo vector $x \in \mathbb{C}^r$ puede escribirse como $x = x_k\, e_k$, con $x_k = (e_k, x)$.

Con esos mismos elementos podemos construir un segundo espacio euclídeo, $\mathbf{E}'$, introduciendo como producto escalar la forma hermítica

$$\{x, y\} := \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \big(D(g)\, x, D(g)\, y\big)\,. \tag{3.3.4}$$

En efecto, resulta inmediato mostrar que con esa definición se satisfacen todos los axiomas del producto escalar (hacerlo como ejercicio!).

El espacio $\mathbf{E}'$ puede ser generado por r vectores, $e'_1, \dots, e'_r \in \mathbb{C}^r$, *ortonormales* en el sentido de que satisfacen $\{e'_k, e'_l\} = \delta_{kl}$.

Sea A la matriz regular que tiene por columnas a las r-úplas (linealmente independientes) e'_k,

$$A := (e'_1, e'_2, \ldots, e'_r) \ . \tag{3.3.5}$$

Entonces $A\, e_k = e'_k$, de manera que $A\, x = x_k\, A\, e_k = x_k\, e'_k$.

En esas condiciones,

$$\{A\, x, A\, y\} = x^*_k \, \{A\, e_k, A\, e_l\}\, y_l = x^*_k\, \delta_{kl}\, y_l = (x, y) \ , \forall\, x, y \in \mathbb{C}^r \, . \tag{3.3.6}$$

Definamos ahora una representación equivalente $D'(G)$ cuyas matrices se obtengan de las de $D(g)$ por la transformación de similitud

$$D'(g) := A^{-1} D(g) A \, , \quad \forall\, g \in G \, . \tag{3.3.7}$$

Estas matrices son unitarias. En efecto, $\forall\, x, y \in \mathbb{C}^r$ tenemos

$$\begin{array}{c} x^\dagger\, D'(g)^\dagger D'(g)\, y = \big(D'(g)\, x, D'(g)\, y\big) = \\[2ex] = \big(A^{-1} D(g) A\, x, A^{-1} D(g) A\, y\big) = \\[2ex] = \big\{D(g) A\, x, D(g) A\, y\big\} = \\[2ex] = \frac{1}{n} \sum_{h \in G} \Big(D(h) D(g) A\, x, D(h) D(g) A\, y\Big) = \\[2ex] = \frac{1}{n} \sum_{h \in G} \Big(D(h \cdot g) A\, x, D(h \cdot g) A\, y\Big) = \\[2ex] = \frac{1}{n} \sum_{g' \in G} \Big(D(g') A\, x, D(g') A\, y\Big) = \big\{A\, x, A\, y\big\} = \\[2ex] = (x, y) = x^\dagger\, \mathbf{1}_r\, y \, , \end{array} \tag{3.3.8}$$

donde hemos usado que la multiplicación a derecha por g (fijo) es una aplicación biunívoca de G en G.

Por lo tanto

$$D'(g)^\dagger D'(g) = \mathbf{1}_r \Rightarrow D'(g)^\dagger = D'(g)^{-1} = D'(g^{-1}) \, , \ \forall\, g \in G \, , \tag{3.3.9}$$

y la representación $D'(G)$ es unitaria. □

Podremos generalizar este resultado al caso de grupos de orden infinito en la medida en que sea posible definir sobre ellos un *promedio* similar al de la ec. (3.3.4). Más adelante veremos que eso es posible en el caso de los *grupos de Lie compactos* (ver Sección 4.2)

Teorema 3.2. *Toda representación unitaria reducible de un grupo G es completamente reducible.*

Sea $D(G)$ una representación unitaria del grupo G, definida sobre el espacio de representación $\mathbf{E}$. Sea $\mathbf{F}' \subset \mathbf{E}$ un subespacio invariante frente a la acción del grupo, y llamemos $\mathbf{F}''$ a su complemento ortogonal en $\mathbf{E}$.

Entonces, $\forall\, x'' \in \mathbf{F}''$ y $\forall\, x' \in \mathbf{F}'$, y dado que $D(g)\, x' \in \mathbf{F}'\,, \forall\, g \in G$, tenemos que

$$0 = \left(x'', D(g)\, x'\right) = \left(D(g)^{\dagger}\, x'', x'\right) = \left(D(g^{-1})\, x'', x'\right)\,,\ \forall\, g^{-1} \in G\,. \tag{3.3.10}$$

Por lo tanto,

$$D(g)\, x'' \perp \mathbf{F}'\,,\ \forall\, x'' \in \mathbf{F}'' \text{ y } \forall\, g \in G\,, \tag{3.3.11}$$

de modo que el subespacio $\mathbf{F}''$ también es invariante frente a la acción de G. □

Corolario 3.2.1. *Toda representación unitaria reducible de un grupo G puede expresarse como suma directa de representaciones unitarias irreducibles.*

Esto simplifica el problema de hallar las representaciones más generales de un grupo de orden finito (y también, como veremos, de los grupos de Lie compactos, que son de orden infinito), pues basta con identificar sus representaciones unitarias irreducibles y tomar sumas directas de éstas para construir un representante de cada clase de representaciones equivalentes del grupo.

3.4. Relaciones de ortogonalidad para grupos de orden finito

Consideremos primero dos representaciones matriciales irreducibles no equivalentes de un grupo G de orden finito n, que llamaremos $D^{(\alpha)}(G)$ y $D^{(\beta)}(G)$, de dimensión r_α y r_β respectivamente.

Sea A la matriz de dimensión $r_\alpha \times r_\beta$ definida por

$$A := \sum_{g\in G} D^{(\alpha)}(g) B D^{(\beta)}(g^{-1})\,, \tag{3.4.1}$$

donde B es cierta matriz de $r_\alpha \times r_\beta$ que especificaremos más tarde.

La matriz A satisface la relación

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(h)A = \textstyle\sum_{g\in G} D^{(\alpha)}(h) D^{(\alpha)}(g) B D^{(\beta)}(g^{-1}) = \\ = \textstyle\sum_{g\in G} D^{(\alpha)}(h\cdot g) B D^{(\beta)}\big((h\cdot g)^{-1}\big) D^{(\beta)}(h) = A D^{(\beta)}(h)\,, \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

$\forall\, h \in G$. Entonces, por el Lema de Schur (ver Lema 3.1), resulta que $A = \mathbf{O}$, cualquiera que sea la matriz B.

La matriz B es un elemento de un espacio lineal de dimensión $r_\alpha \times r_\beta$, que puede ser generado por la base de matrices B_{kl} cuyos elementos de matriz están dados por

$$\left(B_{kl}\right)_{ij} = \delta_{ik}\, \delta_{jl}\,,\ 1 \leq i, k \leq r_\alpha\,,\ 1 \leq j, l \leq r_\beta\,. \tag{3.4.3}$$

En esas condiciones, vemos que las matrices de las representaciones consideradas satisfacen las relaciones (independientes)

$$\sum_{g\in G} D^{(\alpha)}_{ik}(g) D^{(\beta)}_{lj}(g^{-1}) = 0\,, \tag{3.4.4}$$

para todo $i,k = 1,\dots,r_\alpha$ y para todo $j,l = 1,\dots,r_\beta$.

Consideremos ahora el caso en que $D^{(\beta)}(G) = D^{(\alpha)}(G)$. Por el Teorema de Schur (ver Lema 3.2), A debe ser proporcional a la matriz identidad, $A \sim \mathbf{1}_{r_\alpha}$, cualquiera que sea B.

Entonces, si para $B = B_{kl}$ es $A = \lambda^\alpha_{kl}\,\mathbf{1}_{r_\alpha}$, con $1 \le k,l \le r_\alpha$, tenemos que

$$\sum_{g\in G} D^{(\alpha)}_{ik}(g) D^{(\alpha)}_{lj}(g^{-1}) = \lambda^\alpha_{kl}\,\delta_{ij}\,. \tag{3.4.5}$$

Para determinar los valores de las constantes λ^α_{kl} podemos tomar $j = i$ en la anterior igualdad, y sumar sobre $i = 1,\dots,r_\alpha$, para obtener

$$\sum_{g\in G} \left(D^{(\alpha)}(g^{-1}) D^{(\alpha)}(g)\right)_{lk} = \sum_{g\in G} \delta_{lk} = n\,\delta_{lk} = \lambda^\alpha_{kl}\, r_\alpha \Rightarrow \lambda^\alpha_{kl} = \frac{n}{r_\alpha}\,\delta_{lk}\,. \tag{3.4.6}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{g\in G} D^{(\alpha)}_{ik}(g) D^{(\alpha)}_{lj}(g^{-1}) = \frac{n}{r_\alpha}\,\delta_{lk}\,\delta_{ij}\,. \tag{3.4.7}$$

Podemos escribir de manera condensada las ecuaciones (3.4.4) y (3.4.7) como

$$\sum_{g\in G} D^{(\alpha)}_{ik}(g) D^{(\beta)}_{lj}(g^{-1}) = \frac{n}{r_\alpha}\,\delta_{lk}\,\delta_{ij}\,\delta^{\alpha\beta}\,. \tag{3.4.8}$$

Si las representaciones consideradas son unitarias tenemos que

$$D^{(\beta)}_{lj}(g^{-1}) = D^{(\beta)}_{jl}(g)^* \tag{3.4.9}$$

de manera que (3.4.8) se reduce a las **relaciones de ortogonalidad**

$$\sum_{g\in G} D^{(\alpha)}_{ik}(g) D^{(\beta)}_{jl}(g)^* = \frac{n}{r_\alpha}\,\delta_{ij}\,\delta_{lk}\,\delta^{\alpha\beta}\,. \tag{3.4.10}$$

Estas relaciones tienen la siguiente interpretación: si definimos vectores de n componentes identificadas por los elementos del grupo, a razón de un vector por cada elemento de matriz de cada representación de un conjunto de representaciones unitarias irreducibles no equivalentes,

$$d^{(\alpha)}_{ik} := \begin{pmatrix} D^{(\alpha)}_{ik}(g_1) \\ D^{(\alpha)}_{ik}(g_2) \\ \vdots \\ D^{(\alpha)}_{ik}(g_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n\,, \tag{3.4.11}$$

entonces esos vectores son no nulos y ortogonales entre sí (en el sentido del producto escalar usual en el espacio euclídeo de las n-úplas complejas),

$$d_{ik}^{(\alpha)\dagger} d_{jl}^{(\beta)} = \frac{n}{r_\alpha}\, \delta_{ij}\, \delta_{lk}\, \delta^{\alpha\beta} \,. \tag{3.4.12}$$

Como esos vectores son linealmente independientes, su número, σ, no supera la dimensión de ese espacio. En consecuencia, sólo es posible seleccionar un número *finito* de representaciones unitarias irreducibles no equivalentes entre sí y sus dimensiones deben satisfacer que

$$\sum_{\alpha=1}^{\sigma} {r_\alpha}^2 \leq n = \#G \,. \tag{3.4.13}$$

Esto demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *El número de clases de equivalencia de representaciones irreducibles de un grupo de orden finito es finito, y la suma de los cuadrados de sus dimensiones no supera al orden del grupo*[1].

También podemos obtener un conjunto de condiciones sobre los caracteres en las distintas clases de equivalencia de representaciones irreducibles tomando las trazas de las matrices en la ec. (3.4.10),

$$\sum_{g\in G} D_{kk}^{(\alpha)}(g) D_{ll}^{(\beta)}(g)^* = \sum_{g\in G} \chi^{(\alpha)}(g)\, \chi^{(\beta)}(g)^* = \frac{n}{r_\alpha}\, r_\alpha\, \delta^{\alpha\beta} \,. \tag{3.4.14}$$

Teniendo en cuenta que los elementos de G pueden ser organizados en clases de elementos conjugados, $K_i \subset G$, con $i = 1, 2, \ldots, s$, de modo que $G = \cup_{i=1}^{s} K_i$ con $K_i \cap K_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y que los caracteres en una representación son una propiedad de cada clase, podemos escribir (3.4.14) como

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{g\in K_i} \chi^{(\alpha)}(g)\, \chi^{(\beta)}(g)^* = \sum_{i=1}^{s} n_i\, \chi_i^{(\alpha)}\, \chi_i^{(\beta)^*} = n\, \delta^{\alpha\beta} \,, \tag{3.4.15}$$

donde n_i es el orden de la i-ésima clase, $n_i = \#K_i$, y $\chi_i^{(\alpha)}$ es el carácter común a todos los elementos de la clase K_i en la representación $D^{(\alpha)}(G)$, $\chi_i^{(\alpha)} = \chi^{(\alpha)}(g) = \mathrm{tr}\{D^{(\alpha)}(g)\}$ con $g \in K_i$.

En consecuencia, podemos definir los **vectores de caracteres** de cada clase de representaciones irreducibles,

$$c^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n_1}{n}}\, \chi_1^{(\alpha)} \\ \sqrt{\frac{n_2}{n}}\, \chi_2^{(\alpha)} \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{n_s}{n}}\, \chi_s^{(\alpha)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^s \,,\ \alpha = 1, \ldots, \sigma \,, \tag{3.4.16}$$

[1]Más adelante mostraremos que estos dos números son iguales.

los que, de acuerdo con (3.4.15), son ortonormales[2],

$$c^{(\alpha)\dagger} c^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta} \,. \tag{3.4.17}$$

Como esos vectores son linealmente independientes, este resultado prueba el siguiente teorema.

Teorema 3.4. *El número de clases de equivalencia de representaciones irreducibles de un grupo de orden finito G no supera al número de clases de elementos conjugados en en el grupo*[3].

3.5. Caracteres simples - Teorema de Burnside

Los vectores de caracteres de las clases de representaciones irreducibles se dicen **simples**. Los vectores de caracteres de representaciones reducibles, llamados **caracteres compuestos**, pueden expresarse en términos de los caracteres simples.

En efecto, si

$$D(G) = \bigoplus_{\alpha=1}^{\sigma} a_\alpha \, D^{(\alpha)}(G) \,, \ a_\alpha \in \mathbb{Z}^+ \,, \tag{3.5.1}$$

donde σ es el número de clases de equivalencia de representaciones irreducibles del grupo G y los coeficientes a_α son enteros no negativos, entonces

$$\chi(g) = \mathrm{tr}\{D(g)\} = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} a_\alpha \, \chi^{(\alpha)}(g) \,, \ \forall \, g \in G \,. \tag{3.5.2}$$

En consecuencia,

$$\chi_i = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} a_\alpha \, \chi_i^{(\alpha)} \,, \ i = 1, \ldots, s \,, \ \text{con } a_\alpha \in \mathbb{Z}^+ \,, \tag{3.5.3}$$

de modo que los caracteres compuestos pueden expresarse como combinaciones lineales de los caracteres simples con coeficientes enteros no negativos.

Dado un vector de caracteres compuesto χ_i, es posible determinar los coeficientes a_α de la combinación lineal en (3.5.3) empleando las relaciones de ortogonalidad de la ecs. (3.4.15). En efecto,

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n} \chi_i \, \chi_i^{(\alpha)*} = \sum_{\beta=1}^{\sigma} a_\beta \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n} \chi_i^{(\beta)} \, \chi_i^{(\alpha)*} = \sum_{\beta=1}^{\sigma} a_\beta \, \delta^{\alpha\beta} = a_\alpha \,. \tag{3.5.4}$$

---

[2]En los *grupos de Lie compactos* (grupos continuos de orden infinito) es posible establecer condiciones de ortogonalidad para los caracteres similares a (3.4.15) a partir de la introducción de cierta *medida de integración* sobre el grupo.

[3]Más adelante mostraremos que estos dos números son iguales.

El cuadrado de la *norma* de un vector de caracteres compuesto como en (3.5.3) resulta ser la suma de los cuadrados de los coeficientes a_α:

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n} \chi_i \chi_i^* = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} a_\alpha \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n} \chi_i \chi_i^{(\alpha)*} = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} {a_\alpha}^2 . \tag{3.5.5}$$

Esto permite establecer un **criterio de reducibilidad** de representaciones basado en sus caracteres.

En efecto, si la representación es irreducible, entonces la suma en el miembro de la derecha de (3.5.3) tiene un único término con coeficiente $a_\alpha = 1$, de modo que

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n} \chi_i \chi_i^* = 1 . \tag{3.5.6}$$

En general,

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n} \chi_i \chi_i^* = p \in \mathbb{N} . \tag{3.5.7}$$

Si $p = 2$ (ó 3), entonces la representación considerada es suma directa de dos (resp. tres) representaciones irreducibles no equivalentes entre sí.

Si $p = 4$ existen dos posibilidades: la representación es suma directa de cuatro representaciones irreducibles no equivalentes entre sí, $p = 1 + 1 + 1 + 1$, o bien es suma directa de dos representaciones irreducibles equivalentes, $p = 2^2$.

Mostraremos en lo que sigue que el número de clases de representaciones irreducibles de un grupo G de orden n es igual al número de clases de elementos conjugados en G, $\sigma = s$, y que la suma de los cuadrados de sus dimensiones es igual al orden del grupo, $\sum_{\alpha=1}^{s} {r_\alpha}^2 = n$.

Para ello recurriremos al Teorema de Cayley, que establece que todo grupo de orden n es isomorfo a un subgrupo regular del grupo de permutaciones $\mathbf{S}_n$. En particular, las matrices correspondientes a ese subgrupo en la *representación de definición* de $\mathbf{S}_n$ (que es fiel - ver Sección 1.2) ofrece una representación matricial *fiel* de dimensión n para G, $D^{\text{reg}}(G)$, que llamaremos **representación regular** de G.

Por tratarse de permutaciones regulares (que, salvo la identidad, no dejan elementos invariantes), estas matrices tienen ceros en la diagonal principal, con la sola excepción de la matriz identidad. Por lo tanto, los caracteres en la representación regular de G son

$$\chi^{\text{reg}}(e) = n \,, \quad \chi^{\text{reg}}(g) = 0 \,, \forall\, g \neq e \,. \tag{3.5.8}$$

La representación regular de G es reducible (si el grupo es no trivial), dado que la norma de su vector de caracteres es

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n} \chi_i^{\rm reg} \chi_i^{\rm reg *} = \frac{1}{n} n^2 = n > 1 \,. \tag{3.5.9}$$

En consecuencia, ella podrá descomponerse como una suma directa de representaciones irreducibles,

$$D^{\rm reg}(G) = \bigoplus_{\alpha=1}^{\sigma} a_\alpha \, D^{(\alpha)}(G) \,. \tag{3.5.10}$$

Aplicado la ec. (3.5.4) obtenemos los coeficientes de esa desarrollo,

$$a_\alpha = \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n} \chi_i^{\rm reg} \chi_i^{(\alpha)*} = \frac{1}{n} \chi^{\rm reg}(e) \, \chi^{(\alpha)}(e)^* = \frac{1}{n} n \, r_\alpha = r_\alpha \,, \tag{3.5.11}$$

donde r_α es la dimensión de las representaciones en la α-ésima clase de representaciones irreducibles.

De ese modo, la representación regular de G contiene (en su descomposición como suma directa) un número de representantes de la α-ésima clase de equivalencia de representaciones irreducibles igual a la dimensión de sus espacios de representación, r_α.

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$n = \chi^{\rm reg}(e) = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} a_\alpha \, \chi^{(\alpha)}(e) = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} a_\alpha \, r_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} {r_\alpha}^2 \,, \tag{3.5.12}$$

probamos el siguiente teorema:

Teorema 3.5. (de Burnside)[4] *La suma de los cuadrados de las dimensiones (del espacio de representación de un elemento) de cada clase de equivalencia de representaciones irreducibles es igual al orden del grupo,*

$$\sum_{\alpha=1}^{\sigma} {r_\alpha}^2 = n = \#G \,. \tag{3.5.13}$$

En efecto, la cota establecida en la ec. (3.4.13) implica que no existen otras representaciones irreducibles que las contenidas en la representación regular del grupo.

[4] William Burnside (1852 - 1927).

Esto implica, en particular, que los vectores $d_{ik}^{(\alpha)}$ definidos en la ec. (3.4.11) forman una base ortogonal de $\mathbb{C}^n$. Entonces, cualquier función definida sobre G,

$$\begin{pmatrix} f(g_1) \\ f(g_2) \\ \vdots \\ f(g_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{3.5.14}$$

puede ser desarrollada en esa base, de modo que

$$f(g) = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \sum_{i,k=1}^{r_\alpha} C_{ik}^{\alpha} \, D_{ik}^{(\alpha)}(g) \,, \quad \forall \, g \in G \,, \tag{3.5.15}$$

para ciertas constantes C_{ik}^{α}.

Consideremos ahora una **función de clase**, es decir, una función definida sobre G que toma el mismo valor sobre todos los elementos de una misma clase de elementos conjugados,

$$f(g) = f_i \,, \ \forall \, g \in K_i \,, \ \text{con } i = 1, 2, \ldots, s \,. \tag{3.5.16}$$

Por similitud con la definición de los vectores de caracteres (ver ec. (3.4.16)), esta función define un vector de $\mathbb{C}^s$,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n_1}{n}} \, f_1 \\ \sqrt{\frac{n_2}{n}} \, f_2 \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{n_s}{n}} \, f_s \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^s \,. \tag{3.5.17}$$

Una función con esas propiedades satisface

$$f(g) = f(h \cdot g \cdot h^{-1}) = \frac{1}{n} \sum_{h \in G} f(h \cdot g \cdot h^{-1}) \,, \tag{3.5.18}$$

y como $f(g)$ también puede ser desarrollada como en (3.5.15) podemos escribir

$$\begin{aligned} n\, f(g) &= \sum_{h\in G}\sum_{\alpha=1}^{\sigma}\sum_{i,k=1}^{r_\alpha} C_{ik}^{\alpha}\, D_{ik}^{(\alpha)}(h\cdot g\cdot h^{-1}) = \\ &= \sum_{h\in G}\sum_{\alpha=1}^{\sigma}\sum_{i,k,j,l=1}^{r_\alpha} C_{ik}^{\alpha}\, D_{ij}^{(\alpha)}(h) D_{jl}^{(\alpha)}(g) D_{lk}^{(\alpha)}(h^{-1}) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\sigma}\sum_{i,k,j,l=1}^{r_\alpha} C_{ik}^{\alpha}\, D_{jl}^{(\alpha)}(g) \sum_{h\in G} D_{ij}^{(\alpha)}(h) D_{lk}^{(\alpha)}(h^{-1}) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\sigma}\sum_{i,k,j,l=1}^{r_\alpha} C_{ik}^{\alpha}\, D_{jl}^{(\alpha)}(g)\, \frac{n}{r_\alpha}\, \delta_{ik}\, \delta_{jl} = \\ &= n\sum_{\alpha=1}^{\sigma}\left\{\frac{1}{r_\alpha}\sum_{k=1}^{r_\alpha} C_{kk}^{\alpha}\right\}\chi^{(\alpha)}(g)\,,\ \forall\, g\in G\,, \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

donde hemos usado las relaciones de ortogonalidad de la ec. (3.4.8).

Por lo tanto, toda función de clase (en la forma dada en (3.5.17)) puede ser desarrollada como una combinación lineal de los σ vectores de caracteres simples $c^{(\alpha)}$ (dados en la ec. (3.4.16)), que son ortonormales (ver ec. (3.4.17)).

Pero esto requiere que los caracteres simples generen todo el espacio $\mathbb{C}^s$, lo que implica que su número (uno por cada clase de equivalencia de representaciones irreducibles) debe coincidir con el número de clases de elementos conjugados en G. Es decir, $\sigma = s$.

Esto prueba el siguiente teorema:

Teorema 3.6. *El número de clases de equivalencia de representaciones irreducibles de un grupo de orden finito G coincide con el número de clases de elementos conjugados en G.*

Como consecuencia de los Teoremas 3.5 y 3.6, podemos construir una **tabla de caracteres** para un grupo G de orden n con s clases de elementos conjugados,

G	K_1	K_2	$\dots$	K_s
$D^{(1)}$	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\dots$	$\chi_s^{(1)}$
$D^{(2)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\dots$	$\chi_s^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$D^{(s)}$	$\chi_1^{(s)}$	$\chi_2^{(s)}$	$\dots$	$\chi_s^{(s)}$

(3.5.20)

donde las entradas de la tabla son las (clases de equivalencia de) representaciones irreducibles no equivalentes entre sí, y las clases de elementos conjugados respectivamente. Además, las dimensiones de las representaciones irreducibles satisfacen

$$\sum_{\alpha=1}^{s} {r_\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\chi_1^{(\alpha)}\right)^2 = n\,. \tag{3.5.21}$$

La α-esima fila de la tabla corresponde al vector de caracteres $c^{(\alpha)}$ definido en (3.4.16), a menos de un factor $\sqrt{\frac{n_i}{n}}$ en la i-esima componente, para $i = 1, \dots, s$. Como los vectores $c^{(\alpha)}$ son ortonormales, con ellos puede construirse una matriz unitaria,

$$\mathcal{U} := \left(\begin{array}{cccc} c^{(1)} & c^{(2)} & \dots & c^{(s)} \end{array}\right)\,, \text{ con } \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = \mathbf{1}_s\,. \tag{3.5.22}$$

Pero entonces también es $\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger = \mathbf{1}_s$, lo que implica que los vectores

$$b_i := \sqrt{\frac{n_i}{n}} \begin{pmatrix} \chi_i^{(1)} \\ \chi_i^{(2)} \\ \vdots \\ \chi_i^{(s)} \end{pmatrix}\,, \quad 1 = 1, \dots, s\,, \tag{3.5.23}$$

también son ortonormales.

Esto significa que las *columnas* de la tabla de caracteres son ortogonales entre sí y de norma $\frac{n}{n_i}$,

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \chi_i^{(\alpha)^*} \chi_k^{(\alpha)} = \frac{n}{n_i}\,\delta_{ik}\,, \quad 1 \leq i, k \leq s\,. \tag{3.5.24}$$

Estas igualdades constituyen un conjunto de $\frac{s(s+1)}{2}$ condiciones sobre los caracteres, equivalentes a las condiciones de ortogonalidad de la ec. (3.4.15).

Ejemplo 3.2. En un grupo abeliano G de orden n, cada elemento forma una clase por sí mismo. Entonces, $s = n$, y tenemos que

$$\sum_{\alpha=1}^{n} {r_\alpha}^2 = n\,, \tag{3.5.25}$$

donde $r_\alpha \geq 1$. Por lo tanto, $r_\alpha = 1$, para todo $\alpha = 1, \dots, n$, y el grupo tiene n representaciones irreducibles no equivalentes unidimensionales.

Por otra parte, como $n < \infty$, todo elemento $a \in G$ es de orden finito, es decir, $a^k = e$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces, la *matriz* correspondiente en la α-ésima representación irreducible, $D^{(\alpha)}(a) = \chi^{(\alpha)}(a)$, es tal que $\chi^{(\alpha)}(a)^k = 1 \Rightarrow D^{(\alpha)}(a) = \chi^{(\alpha)}(a) = \sqrt[k]{1}$, y los caracteres son todos raíces de la unidad.

Para el grupo cíclico de orden n generado por a, isomorfo a $\mathbb{Z}_n$, las representaciones irreducibles no equivalentes están caracterizadas por

$$\chi^{(\alpha)}(a) = D^{(\alpha)}(a) = e^{i\frac{2\pi}{n}\alpha}\,, \quad \alpha = 1, \dots, n\,. \tag{3.5.26}$$

En particular, $\alpha = n$ corresponde a la representación trivial.

Ejemplo 3.3. Ya hemos visto que el grupo $\mathbf{S}_3$ (de orden $\#\mathbf{S}_3 = 3! = 6$) contiene tres clases de elementos conjugados,

$$K_1 = \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\ , \quad K_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array}\ , \quad K_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}\ , \tag{3.5.27}$$

con $\#K_1 = 1\,, \#K_2 = 2\,, \#K_3 = 3$. Entonces, $\mathbf{S}_3$ tiene tres representaciones irreducibles no equivalentes, cuyas dimensiones satisfacen

$${r_1}^2 + {r_2}^2 + {r_3}^2 = 6\,, \tag{3.5.28}$$

ecuación que tiene por única solución (con $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3$) a $r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = 2$. Es decir, este grupo tiene dos representaciones unidimensionales (la trivial y la alternada) y una representación bidimensional irreducibles y no equivalentes entre sí.

Esa información es suficiente para conocer los elementos de la tabla de caracteres correspondientes a las dos primeras filas y a la primera columna. Los dos elementos restantes pueden ser calculados fácilmente haciendo uso de la ortogonalidad de las columnas, para obtener finalmente[5]

$\mathbf{S}_3$	K_1	K_2	K_3
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	-1
$D^{(3)}$	2	-1	0

(3.5.31)

Ejemplo 3.4. Consideremos la *representación de definición* del grupo de permutaciones $\mathbf{S}_3$:

$$M(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5.32}$$

[5]Dado que las representaciones irreducibles de un grupo de orden finito están contenidas en su representación regular un número de veces igual a su dimensión, estudiando los subespacios invariantes de esta representación puede determinarse un conjunto representativo de esas clases de equivalencia.

Por esa vía se encuentra, por ejemplo, que

$$D^{(3)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{(3)}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^{(3)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.5.29}$$

cuyas trazas son

$$\chi_1^{(3)} = 2\,, \quad \chi_2^{(3)} = -1\,, \quad \chi_3^{(3)} = 0\,, \tag{3.5.30}$$

en coincidencia con la tabla en (3.5.31).

etc. Los correspondientes caracteres son

$$\chi(e) = \chi_1 = 3\,, \quad \chi(a) = \chi_2 = 0\,, \quad \chi(\alpha) = \chi_3 = 1\,. \tag{3.5.33}$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que la γ-ésima representación irreducible de $\mathbf{S}_3$ está contenida en esta representación un número de veces a_γ dado por

$$6\,a_\gamma = 1\,\chi_1\,\chi_1^{(\gamma)} + 2\,\chi_2\,\chi_2^{(\gamma)} + 3\,\chi_3\,\chi_3^{(\gamma)}\,, \tag{3.5.34}$$

de la tabla (3.5.31) obtenemos de inmediato que

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = 0\,, \quad a_3 = 1\,. \tag{3.5.35}$$

Por ejemplo, podemos diagonalizar la matriz $M(a)$ según $A^{-1}M(a)A$, donde A es la matriz formada por los autovectores de la primera,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.5.36}$$

Esa transformación de similitud pone en evidencia ambos subespacios invariantes, identificándose fácilmente la representación trivial y la representación bidimensional $D^{(3)}$ cuyas matrices resultan

$$D^{(3)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D^{(3)}(a) = \begin{pmatrix} -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

$$D^{(3)}(b) = \begin{pmatrix} -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad D^{(3)}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5.37}$$

$$D^{(3)}(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^{(3)}(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El caso del grupo $\mathbf{S}_3$ es particularmente simple, porque las condiciones que hemos deducido, junto con alguna información adicional que tenemos acerca del grupo, nos permite determinar completamente su tabla de caracteres.

Pero en el caso de grupos de mayor orden eso no será posible en general, porque mientras que el número de los elementos de la tabla de caracteres crece como s^2, el número de condiciones de ortogonalidad crece sólo como $\frac{s^2}{2}$.

No obstante, en la próxima sección veremos que existen condiciones adicionales sobre los caracteres simples que son suficientes para determinar completamente su tabla de caracteres.

3.6. Álgebra asociada a un grupo de orden finito

El **álgebra** asociada a un grupo G de orden finito n es un espacio vectorial complejo de dimensión n, cuyos vectores pueden ser representados como sumas formales

$$\sum_{g\in G} a_g\, g\,, \quad \text{con } a_g \in \mathbb{C}\,, \tag{3.6.1}$$

que está estructurado con las operaciones de **suma**

$$\sum_{g\in G} a_g\, g + \sum_{g\in G} b_g\, g := \sum_{g\in G} (a_g + b_g)\, g \tag{3.6.2}$$

y *producto* (bilineal, asociativo y, en general, no conmutativo[6])

$$\sum_{g\in G} a_g\, g \cdot \sum_{h\in G} b_h\, h := \sum_{g'\in G} \sum_{h\in G} a_{g'}\, b_h\, (g'\cdot h) = \sum_{g\in G} \left\{ \sum_{h\in G} a_{g\cdot h^{-1}}\, b_h \right\} g\,. \tag{3.6.4}$$

Consideremos en el álgebra de G los elementos de la forma

$$\kappa_i := \sum_{g\in K_i} g\,, \quad i = 1, 2, \ldots, s\,. \tag{3.6.5}$$

Esto es, los vectores con componentes $a_g = 1$ para $g \in K_i$ y $a_g = 0$ en todo otro caso. En particular, $\kappa_1 = e$.

Estos vectores son *invariantes por conjugación*,

$$h\cdot \kappa_i \cdot h^{-1} = \sum_{g\in K_i} h\cdot g\cdot h^{-1} = \sum_{g'\in K_i} g' = \kappa_i\,, \tag{3.6.6}$$

dado que la conjugación por un elemento fijo $h \in G$ es un aplicación biunívoca de K_i en esa misma clase. Esta propiedad hace que dichos elementos del álgebra *conmuten* entre sí,

$$\kappa_i \cdot \kappa_j = \sum_{g\in K_j} \kappa_i \cdot g = \sum_{g\in K_j} g\cdot g^{-1}\cdot \kappa_i \cdot g = \kappa_j \cdot \kappa_i\,, \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, s\,. \tag{3.6.7}$$

Por su parte, el producto de dos de tales elementos,

$$\kappa_i\, \kappa_j = \sum_{g\in K_i} \sum_{h\in K_j} g\cdot h\,, \tag{3.6.8}$$

es también invariante por conjugación,

$$h\cdot \kappa_i \cdot \kappa_j \cdot h^{-1} = h\cdot \kappa_i \cdot h^{-1}\cdot h\cdot \kappa_j \cdot h^{-1} = \kappa_i \cdot \kappa_j\,. \tag{3.6.9}$$

---

[6]En efecto, llamando $f = g\cdot h^{-1}$, el coeficiente en la suma del miembro de la derecha de (3.6.4) se escribe como

$$\sum_{h\in G} a_{g\cdot h^{-1}}\, b_h = \sum_{f\in G} a_f\, b_{f^{-1}\cdot g} \neq \sum_{f\in G} b_{g\cdot f^{-1}}\, a_f \tag{3.6.3}$$

si el grupo es no Abeliano.

En consecuencia, los elementos de G en el producto $\kappa_i \cdot \kappa_j$ deben aparecer sumados sobre clases conjugadas completas, todos ellos en una dada clase asociados a un mismo coeficiente:

$$\kappa_i \cdot \kappa_j = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk}\, \kappa_k \,, \tag{3.6.10}$$

donde los coeficientes c_{ijk} están determinados por la ley de composición en G, son simétricos en el primer par de índices, $c_{jik} = c_{ijk}$, y toman valores enteros no negativos.

Consideremos ahora una representación irreducible del grupo G, $D(G)$. Ella nos provee de una *representación matricial* para el álgebra de G,

$$\sum_{g\in G} a_g\, g \longrightarrow \sum_{g\in G} a_g\, D(g) \,, \tag{3.6.11}$$

donde la suma y el producto por números son las operaciones usuales sobre matrices.

En efecto, para el producto de dos vectores tenemos

$$\begin{array}{c} \sum_{g\in G} a_g\, D(g) \sum_{h\in G} b_h\, D(h) = \sum_{g\in G} \sum_{h\in G} a_g\, b_h\, D(g\cdot h) = \\[2ex] = \sum_{g\in G} \left\{ \sum_{h\in G} a_{g\cdot h^{-1}}\, b_h \right\} D(g) \,, \end{array} \tag{3.6.12}$$

en coincidencia con (3.6.4).

En particular, si

$$\kappa_i \longrightarrow D_i = \sum_{g\in K_i} D(g) \,, \tag{3.6.13}$$

entonces de (3.6.10) obtenemos

$$D_i D_j = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk}\, D_k \,, \tag{3.6.14}$$

donde los coeficientes c_{ijk} no dependen de la representación.

Por otra parte,

$$D(g) D_i D(g^{-1}) = \sum_{h\in K_i} D(g) D(h) D(g^{-1}) = \sum_{h'\in K_i} D(h') = D_i \,, \tag{3.6.15}$$

de modo que

$$D(g) D_i = D_i D(g) \,, \quad \forall\, g \in G \,. \tag{3.6.16}$$

Por lo tanto, por el Lema de Schur, debe ser $D_i = \lambda_i\, \mathbf{1}_r$, si r es la dimensión de la representación considerada.

Para determinar la constante de proporcionalidad tomamos la traza

$$\mathrm{tr}\{D_i\} = \sum_{g\in K_i} \chi(g) = n_i\, \chi_i = r\, \lambda_i \;\Rightarrow\; \lambda_i = \frac{n_i}{r}\, \chi_i \,. \tag{3.6.17}$$

Entonces, de (3.6.14) obtenemos

$$\lambda_i \lambda_j \, \mathbf{1}_r = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk} \, \lambda_k \, \mathbf{1}_r \;\Rightarrow\; \frac{n_i n_j}{r^2} \, \chi_i \chi_j = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk} \, \frac{n_k}{r} \, \chi_k \,, \tag{3.6.18}$$

donde $r = \chi_1$ es la dimensión de la representación.

Por lo tanto, los caracteres simples de un grupo de orden finito G con s clases de elementos conjugados satisfacen las relaciones

$$n_i n_j \, \chi_i^{(\alpha)} \chi_j^{(\alpha)} = \chi_1^{(\alpha)} \sum_{k=1}^{s} c_{ijk} \, n_k \chi_k^{(\alpha)} \,, \text{ para } 1 \leq i \leq j \leq s \,, \tag{3.6.19}$$

y para todas las clases de equivalencia de representaciones irreducibles de G, $\alpha = 1 \ldots, s$.

Estas igualdades imponen $\frac{s \times s(s+1)}{2}$ condiciones sobre los s^2 caracteres simples. No obstante, ellas no son incompatibles, sino que son en gran medida redundantes (y, a su vez, compatibles con las condiciones de ortogonalidad[7]), resultando suficientes para determinar completamente la tabla de caracteres del grupo.

Ejemplo 3.5. Para el grupo $\mathbf{S}_3$ tenemos

$$\kappa_1 = e \,, \quad \kappa_2 = a + b \,, \quad \kappa_3 = \alpha + \beta + \gamma \,. \tag{3.6.22}$$

[7]Para ver que esto es así consideremos representaciones unitarias irreducibles, para las cuales $\chi^{(\alpha)}(g) = \chi^{(\alpha)}(g^{-1})^*$, y llamemos $K_{j'}$ la clase que contiene a las inversas de los elementos $g \in K_j$. Nótese que $\#K_{j'} = n_{j'} = n_j = \#K_j$.

En esas condiciones, la ec. (3.6.19) se escribe como

$$n_i \, n_{j'} \, \chi_i^{(\alpha)} \chi_{j'}^{(\alpha)^*} = \sum_{k=1}^{s} c_{ijk} \, n_k \, \chi_k^{(\alpha)} \, \chi_1^{(\alpha)^*} \,. \tag{3.6.20}$$

Entonces, intercambiando $j \leftrightarrow j'$, sumando sobre las clases de representaciones irreducibles y empleando las relaciones de ortogonalidad en su forma (3.5.24) obtenemos

$$n_i \, n_j \sum_{\alpha=1}^{s} \chi_i^{(\alpha)} \chi_j^{(\alpha)^*} = n_i \, n_j \, \tfrac{n}{n_i} \, \delta_{ij} = n \, n_i \, \delta_{ij} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s} c_{ij'k} \, n_k \sum_{\alpha=1}^{s} \chi_k^{(\alpha)} \, \chi_1^{(\alpha)^*} = \sum_{k=1}^{s} c_{ij'k} \, n_k \, \tfrac{n}{n_1} \, \delta_{k1} = n \, c_{ij'1} \,, \tag{3.6.21}$$

$$\Rightarrow c_{ij'1} = n_i \, \delta_{ij} \,.$$

Por otra parte, sabemos que el coeficiente $c_{ij'1}$ es no nulo sólo si en la clase $K_{j'}$ aparecen los elementos inversos de los que pertenecen a K_i (es decir, si $j' = i' \Rightarrow j = i$) y, en ese caso, $c_{ij'1} = n_i$, en coincidencia con (3.6.21).

Tomando productos entre los vectores del álgebra de la forma κ_i , $i = 1, \ldots, s$, obtenemos los coeficientes c_{ijk}. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\kappa_2{}^2 &= (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2 = \\ &= b + e + e + a = 2\kappa_1 + \kappa_2\,,\end{aligned}$$

$$\kappa_2 \cdot \kappa_3 = (a+b)\cdot(\alpha+\beta+\gamma) = 2\kappa_3 = \kappa_3\cdot\kappa_2\,,$$

$$\kappa_3{}^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 = 3\kappa_1 + 3\kappa_2\,, \text{ etc.}$$

Resulta en definitiva

$$\begin{array}{lll} c_{111} = 1\,, & c_{122} = 1\,, & c_{133} = 1\,, \\ c_{221} = 2\,, & c_{222} = 1\,, & c_{223} = 0\,, \\ c_{231} = 0\,, & c_{232} = 0\,, & c_{233} = 2\,, \\ c_{321} = 0\,, & c_{322} = 0\,, & c_{323} = 2\,, \\ c_{331} = 3\,, & c_{332} = 3\,, & c_{333} = 0\,, \end{array} \tag{3.6.23}$$

siendo nulos el resto de los coeficientes.

Conocidos estos coeficientes, a partir de (3.6.19) puede plantearse un conjunto de ecuaciones independientes que sean suficientes para determinar completamente la tabla de caracteres simples (3.5.31) (hacerlo como ejercicio!).

3.7. Producto directo de representaciones

Dada una representación matricial $D(G)$ de un grupo G, puede construirse una nueva representación tomando las complejas conjugadas de las matrices de $D(G)$[8]. En efecto,

$$D(g_1)^*\,D(g_2)^* = \{D(g_1)\,D(g_2)\}^* = D(g_1\cdot g_2)^*\,,\ \forall\, g_1, g_2 \in G\,. \tag{3.7.1}$$

Esta es la **representación conjugada**, que puede o no ser equivalente a $D(G)$.

Otra forma de generar nuevas representaciones de un grupo a partir de algunas conocidas consiste en tomar el producto directo de éstas, procedimiento que describimos a continuación.

Sean $\mathbf{E}^{(\alpha)}$ y $\mathbf{E}^{(\beta)}$ los espacios de dos representaciones de un grupo G, $D^{(\alpha)}(G)$ y $D^{(\beta)}(G)$, de dimensión $r_\alpha = r$ y $r_\beta = r'$ respectivamente.

Supongamos que los espacios de representación $\mathbf{E}^{(\alpha)}$ y $\mathbf{E}^{(\beta)}$ estén generados por los conjuntos completos $\{e_1, \ldots, e_r\}$ y $\{e'_1, \ldots, e'_{r'}\}$ respectivamente, de modo que

[8]También se obtiene una representación tomando las traspuestas de las inversas de las matrices, $D(g^{-1})^t$.

los vectores en esos espacios tienen desarrollos de la forma

$$x = x_i\, e_i \in \mathbf{E}^{(\alpha)}\,, \quad y = y_j\, e'_j \in \mathbf{E}^{(\beta)}\,, \tag{3.7.2}$$

con $x_i, y_j \in \mathbb{C}$.

Referidos a esas bases, los operadores de las representaciones actúan según

$$D^{(\alpha)}(g)\, x = \big(D^{(\alpha)}_{kl}(g)\, x_l\big) e_k\,, \quad D^{(\beta)}(g)\, y = \big(D^{(\beta)}_{kl}(g)\, y_l\big) e'_k\,. \tag{3.7.3}$$

El espacio **producto directo** o **producto tensorial**, $\mathbf{E}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{E}^{(\beta)}$, es un espacio lineal de dimensión $r \times r'$ generado por una base que denotaremos por $\{e_i \otimes e'_j\,, 1 \leq i \leq r\,, 1 \leq j \leq r'\}$. Un vector arbitrario de ese espacio tiene un desarrollo de la forma $z = z_{ij}\, e_i \otimes e'_j$, de modo que sus componentes forman una matriz de $r \times r'$.

Dados dos vectores como en (3.7.2), su producto tensorial es el vector $z = x \otimes y := x_i\, y_j\, e_i \otimes e'_j \in \mathbf{E}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{E}^{(\beta)}$.

La representación **producto directo**, $(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)})(G)$, es una representación matricial del grupo G cuyo espacio de representación es $\mathbf{E}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{E}^{(\beta)}$, sobre el que actúa según

$$\big(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\big)(g)\, z = \Big\{\big[\big(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\big)(g)\big]_{ij,kl}\, z_{kl}\Big\}\, e_i \otimes e'_j\,, \tag{3.7.4}$$

donde

$$\big[\big(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\big)(g)\big]_{ij,kl} = D^{(\alpha)}_{ik}(g)\, D^{(\beta)}_{jl}(g)\,. \tag{3.7.5}$$

Efectivamente, se trata de un homomorfismo, porque para el producto de dos operadores cualesquiera tenemos

$$\begin{aligned}
&\big[\big(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\big)(g_1)\big(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\big)(g_2)\big]_{ij,kl} = \\
&= \big[\big(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\big)(g_1)\big]_{ij,uv}\, \big[\big(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\big)(g_2)\big]_{uv,kl} = \\
&= D^{(\alpha)}_{iu}(g_1) D^{(\beta)}_{jv}(g_1)\, D^{(\alpha)}_{uk}(g_2) D^{(\beta)}_{vl}(g_2) = \\
&= D^{(\alpha)}_{ik}(g_1 \cdot g_2)\, D^{(\beta)}_{jl}(g_1 \cdot g_2) \\
&= \big[\big(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\big)(g_1 \cdot g_2)\big]_{ij,kl}\,, \quad \forall\, i,j,k,l\,,\ \forall\, g_1, g_2 \in G\,.
\end{aligned} \tag{3.7.6}$$

El producto directo de representaciones unitarias es también una representación unitaria. En efecto, sean $D^{(\alpha)}(G)$ y $D^{(\beta)}(G)$ dos representaciones unitarias de G.

Entonces

$$\begin{aligned} \left[\left(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\right)(g)\right]_{kl,ij}{}^{*} &= D^{(\alpha)}_{ki}(g)^{*}\, D^{(\beta)}_{lj}(g)^{*} \\ = D^{(\alpha)}_{ik}(g^{-1})\, D^{(\beta)}_{jl}(g^{-1}) &= \left[\left(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\right)(g^{-1})\right]_{ij,kl} . \end{aligned} \tag{3.7.7}$$

Lema 3.3. *Los caracteres de la representación producto directo $D^{(\alpha\otimes\beta)}(G) := \left(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\right)(G)$ están dados por el producto de los caracteres de $D^{(\alpha)}(G)$ y $D^{(\beta)}(G)$.*

En efecto,

$$\begin{aligned} \chi^{(\alpha\otimes\beta)}(g) = \operatorname{tr}\left\{\left(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\right)(g)\right\} = \left[\left(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)}\right)(g)\right]_{ij,ij} = \\ = D^{(\alpha)}_{ii}(g)\, D^{(\beta)}_{jj}(g) = \chi^{(\alpha)}(g)\, \chi^{(\beta)}(g) . \end{aligned} \tag{3.7.8}$$

□

En general, la representación $D^{(\alpha\otimes\beta)}(G)$ no será irreducible. Conocidos los caracteres simples, podremos identificar las representaciones irreducibles contenidas en $D^{(\alpha\otimes\beta)}(G)$ empleando las condiciones de ortogonalidad para vectores de caracteres. Para ello aplicamos la relación deducida en (3.5.4),

$$a_\gamma = \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n}\, \chi_i^{(\alpha\otimes\beta)}\, \chi_i^{(\gamma)*} = \sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{n}\, \chi_i^{(\alpha)}\, \chi_i^{(\beta)}\, \chi_i^{(\gamma)*} , \tag{3.7.9}$$

lo que nos permitirá determinar la **descomposición de Clebsh - Gordan**[9]

$$D^{(\alpha\otimes\beta)}(G) = \bigoplus_{\gamma=1}^{s} a_\gamma\, D^{(\gamma)}(G) , \tag{3.7.10}$$

que expresa el producto directo como suma directa de representaciones irreducibles.

Evidentemente, las dimensiones de las representaciones en (3.7.10) deben satisfacer la relación

$$r_{\alpha\otimes\beta} = r_\alpha\, r_\beta = \sum_{\gamma=1}^{s} a_\gamma\, r_\gamma . \tag{3.7.11}$$

Bibliografía:

- H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symmétries des Particules Elémentaires*. Gordon and Breach, New York, 1967.
- M. Hammermesh, *Group Theory and its Applications to Physical Problems*. Courier Dover Publications, 1989.
- E. Wigner, *Group theory: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Academic Press, New York, 1959.

[9]Alfred Clebsch (1833 - 1872). Paul Gordan (1837 - 1912).

- J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Academic Press, 1984.

Capítulo 4

GRUPOS CONTINUOS

4.1. Grupos continuos

Consideremos el grupo $O(3)$, cuyos elementos son las matrices reales ortogonales de 3×3,

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}, \quad R_{ij} \in \mathbb{R}. \tag{4.1.1}$$

Cada matriz $R \in O(3)$ corresponde un punto en $\mathbb{R}^9$ que yace sobre una hipersuperficie determinada por las seis ecuaciones algebraicas

$$R^t R = \mathbf{1_3} \Rightarrow R_{ik} R_{il} = \delta_{kl}, k \leq l, \tag{4.1.2}$$

lo que deja sólo tres parámetros reales independientes. Esa hipersuperficie *suave*, de *dimensión* 3, es llamada **variedad** del grupo $O(3)$. Este es un ejemplo particular de **grupo continuo**.

En general, un grupo continuo de n parámetros (reales) tiene sus elementos identificados de manera biunívoca con los puntos de una **variedad n-dimensional**, inmersa en $\mathbb{R}^m$ (com $m \geq n$) y determinada por un conjunto de $m - n$ ecuaciones algebraicas.

Una forma de describir una hipersuperficie de ese tipo consiste en establecer **sistemas de coordenadas locales**, que pongan en correspondencia uno a uno los puntos de la variedad contenidos en una región abierta de $\mathbb{R}^m$ con los puntos de una región abierta de $\mathbb{R}^n$.

En general no será posible establecer un único sistema *global* de coordenadas, sino que será necesario cubrir la variedad con un conjunto de abiertos, cada uno con su sistema local de coordenadas, los que deberán ser compatibilizados dando la relación entre unas y otras coordenadas en la región de superposición de dos abiertos. Estos conjuntos de abiertos y las relaciones entre sus coordenadas describen las propiedades globales o **topología** de la variedad.

Ejemplo 4.1. la esfera $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, es una variedad bidimensional que puede ser cubierta con dos abiertos, entornos del polo norte y del polo sur respectivamente, en los que se puede establecer sistemas

locales de coordenadas mediante la proyección estereográfica. Los puntos de la esfera contenidos en una banda alrededor del ecuador tendrán asignadas coordenadas en uno y otro sistema, pudiéndose escribir a unas como funciones *diferenciables* de las otras.

Ejemplo 4.2. En ciertos casos es posible establecer un único sistema de coordenadas si a él se agrega cierta información sobre la topología de la variedad. Por ejemplo, los puntos sobre una circunferencia $\mathcal{S}^1$ pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los del segmento $[0, 2\pi]$ siempre que además se identifiquen sus extremos, $2\pi \equiv 0$.

En general, una **variedad diferenciable n-dimensional** $\mathcal{M}$ podrá ser cubierta por un **conjunto de abiertos** U_p, entornos de ciertos puntos $p \in \mathcal{M}$, tales que $\mathcal{M} = \bigcup_p U_p$. En cada abierto tendremos un sistema local de coordenadas, es decir, una aplicación $\phi_p : U_p \to \mathbb{R}^n$ que establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de la variedad en ese entorno y los de una región abierta de $\mathbb{R}^n$ (por lo que $\mathcal{M}$ resulta **localmente euclídea**). Además, si $U_p \cap U_q \neq \emptyset$, las coordenadas $\mathbf{x}$ asignadas por ϕ_p a un punto genérico de esa intersección serán *funciones continuas y diferenciables* de las coordenadas $\mathbf{y}$ que le asigna la aplicación ϕ_q a ese mismo punto, $\mathbf{x} = \left(\phi_p \circ \phi_q^{-1}\right)(\mathbf{y})$.

Un **grupo continuo** de dimensión n es un conjunto cuyos elementos están en correspondencia biunívoca con los puntos de una variedad diferenciable n-dimensional, y que además se estructura como un grupo respecto de cierta ley de composición asociativa, con neutro e inverso. Ambas estructuras están relacionadas por el hecho de que la composición de elementos del grupo (descrita en términos de sistemas locales de coordenadas establecidos en ciertos entornos de cada elemento) es una aplicación continua sobre la variedad.

Sean $a, b, c \cdots \in G$, elementos de un grupo continuo. Supongamos que, respecto de ciertos sistemas locales de coordenadas, $\phi_a(a) = \alpha$, $\phi_b(b) = \beta$, $\phi_c(c) = \gamma, \ldots$ En esas condiciones, existen funciones continuas Φ (que dependen de la elección de los sistemas locales de coordenadas) tales que, si $c = a \cdot b$, entonces

$$\gamma^\mu = \Phi^\mu(\alpha, \beta), \quad \mu = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1.3}$$

Las propiedades de la ley de composición del grupo requieren que se satisfagan las siguientes condiciones.

a) Asociatividad: como

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \Rightarrow \Phi\left(\alpha, \Phi(\beta, \gamma)\right) = \Phi\left(\Phi(\alpha, \beta), \gamma\right). \tag{4.1.4}$$

b) Existencia del elemento neutro: sean $\varepsilon = \phi_e(e)$, las coordenadas locales de e; entonces

$$e \cdot a = a = a \cdot e \Rightarrow \Phi(\varepsilon, \alpha) = \alpha = \Phi(\alpha, \varepsilon). \tag{4.1.5}$$

c) Existencia del elemento inverso: sean $\overline{\alpha} = \phi_{a^{-1}}(a^{-1})$, las coordenadas locales del elemento inverso de a; entonces

$$a^{-1} \cdot a = e = a \cdot a^{-1} \Rightarrow \Phi(\overline{\alpha}, \alpha) = \varepsilon = \Phi(\alpha, \overline{\alpha}). \tag{4.1.6}$$

Ejemplo 4.3. Los elementos del grupo $O(2)$ son matrices ortogonales de 2×2: $R^t R = \mathbf{1_2}$. Sus cuatro elementos de matriz (reales) están relacionados por las tres condiciones $R_{ik}R_{il} = \delta_{kl},\ k \leq l$, lo que deja un único parámetro real independiente.

Por otra parte, $\det R = \pm 1$. Pero la variación de un parámetro continuo no puede producir una discontinuidad en el determinante.

Las matrices de $O(2)$ con $\det R = 1$ pueden ser representadas como

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \tag{4.1.7}$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$.

Sea

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S^{-1}, \quad \text{con } \det S = -1. \tag{4.1.8}$$

Entonces, si $\det R' = -1 \Rightarrow \det(SR') = 1$. Por lo tanto, todo elemento de $O(2)$ con determinante -1 puede escribirse como

$$R'(\theta) = SR(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = R(-\theta)S. \tag{4.1.9}$$

Los elementos de $O(2)$ están entonces unívocamente identificados por un ángulo y el signo del determinante. Es inmediato verificar que la composición de elementos de este grupo es continua en ese parámetro. Por ejemplo, $R(\theta_1)R(\theta_2) = R\left(\theta_1 + \theta_2|_{mod 2\pi}\right)$.

En consecuencia, $O(2)$ es un grupo continuo, y su variedad asociada está constituida por dos circunferencias $\mathcal{S}^1$, una para cada signo del determinante. En particular, el elemento neutro está contenido en la hoja de la variedad correspondiente a $\det R(\theta) = 1$, lo que define al subgrupo $SO(2)$.

Una variedad se dice **conexa** si dos cualesquiera de sus puntos pueden ser unidos por una curva continua que yace sobre la misma variedad. La variedad de un grupo continuo puede estar constituida por más de una componente conexa.

Un grupo continuo se dice **conexo** si su variedad es conexa.

Teorema 4.1. *La componente conexa de un grupo continuo G que contiene al elemento identidad, e, constituye un subgrupo G_0 de la misma dimensión que G.*

En efecto, sean $a, b \in G_0$; entonces puede variarse con continuidad las coordenadas de esos elementos (eventualmente cambiando de sistemas locales de coordenadas) hasta hacerlos coincidir con la identidad. Es decir, hay caminos sobre la variedad del grupo que llevan $a \to e$ y $b \to e$. Como $b \cdot b^{-1} = e$, también $b^{-1} \in G_0$.

En consecuencia, como la ley de composición es continua, es posible cambiar con continuidad las coordenadas del producto $a \cdot b^{-1}$ de modo que $a \cdot b^{-1} \to a \to e$. Por lo tanto, $a \cdot b^{-1} \in G_0 \Rightarrow G_0$ es un subgrupo de G.

Por otra parte, $\dim G_0 = \dim G$, puesto que la parte conexa de la variedad que contiene a e tiene la misma dimensión que la variedad completa. □

Teorema 4.2. *La componente conexa de un grupo continuo G que contiene al elemento identidad e, G_0, es un subgrupo invariante de G.*

Sea $a \in G_0$ y sea $b \in G$. Entonces es posible cambiar con continuidad las coordenadas del elemento conjugado $b \cdot a \cdot b^{-1}$ hasta hacerlo coincidir con e. En efecto, como a se conecta con continuidad con $e \Rightarrow b \cdot a \cdot b^{-1} \to b \cdot e \cdot b^{-1} = e \Rightarrow b \cdot a \cdot b^{-1} \in G_0$, $\forall\, b \in G$. □

Ejemplo 4.4. $SO(2)$ es un subgrupo invariante de $O(2)$.

Las componentes de la variedad de un grupo continuo G no conexas con la identidad son isomorfas a G_0 como variedad. En efecto, sea $d \notin G_0$, entonces la composición con d a izquierda constituye una aplicación biunívoca entre G_0 y el coset $d \cdot G_0$. Esta relación uno a uno permite establecer sistemas locales de coordenadas que cubren completamente a esa hoja de la variedad a partir de los abiertos que cubren a G_0. De ello resulta que *tienen la misma topología.*

El grupo cociente G/G_0, cuyos elementos (los cosets construidos con G_0) corresponden a las distintas hojas de la variedad, es un grupo discreto[1]

$$G/G_0 = \{d_k \cdot G_0 \mid d_1 = e,\, d_k \notin G_0, \text{para } k = 2, 3, \dots\}\,. \tag{4.1.10}$$

Esto permite reducir el estudio de grupos continuos no conexos a la consideración de los grupos continuos conexos (y de los grupos discretos).

Si G_0 es un grupo continuo conexo y D es un grupo discreto, buscamos reconstruir un grupo continuo no conexo cuyos elementos sean de la forma $d_k \cdot a$, con $d_k \in D$ y

[1]En general, si H es un subgrupo invariante de un grupo continuo G, la dimensión del grupo cociente $\dim(G/H) = \dim G - \dim H$, dado que los cosets $a \cdot H$ están caracterizados por ese número de parámetros independientes.

$a \in G_0$. La composición de dos de tales elementos

$$(d_k \cdot a) \cdot (d_l \cdot b) = (d_k \cdot d_l) \cdot (d_l^{-1} \cdot a \cdot d_l) \cdot b, \tag{4.1.11}$$

donde $(d_l^{-1} \cdot a \cdot d_l) \in G_0$, puesto que éste es un subgrupo invariante de G. En consecuencia, la conjugación por elementos del grupo discreto D, junto con las operaciones en D y G_0, determina completamente las propiedades de G.

Ejemplo 4.5. Sean $G_0 = SO(2)$ y $D = \{\mathbf{1_2}, S\} \approx \mathbb{Z}_2$ (ver ecs. (4.1.7) y (4.1.8)). Entonces, para $R(\theta) \in SO(2)$ tenemos $S^{-1}R(\theta)S = R(-\theta)$.

4.2. Grupos conexos - Grupos de Lie

Consideremos un elemento b de un grupo continuo conexo G. Existe una curva sobre la variedad del grupo que lo conecta con continuidad con el elemento neutro e. Sobre dicha curva podemos seleccionar elementos a_k, con $k = 0, 1, \ldots N$ y N suficientemente grande, tales que

a) $a_0 = e$, $a_N = b$,

b) a_k y a_{k+1} están contenidos en un mismo abierto, de modo que pueden ser referidos a un mismo sistema local de coordenadas,

c) $\forall\, k$, los productos $a_{k+1} \cdot a_k^{-1}$ están contenidos en un mismo entorno de la identidad, de modo que pueden ser referidos a un único sistema local de coordenadas establecido alrededor de e.

En esas condiciones, un elemento arbitrario $b \in G$ (conexo) puede escribirse como la composición de un gran número de elementos próximos de la identidad,

$$b = (a_N \cdot a_{N-1}^{-1}) \cdot (a_{N-1} \cdot a_{N-2}^{-1}) \cdot \ldots (a_2 \cdot a_1^{-1}) \cdot (a_1 \cdot a_0^{-1}) \cdot a_0. \tag{4.2.1}$$

Esto muestra que las propiedades *locales* de la ley de composición, para elementos en un entorno de la identidad e, también contiene información sobre las *propiedades globales del grupo*.

Un **grupo de Lie**[2] es un grupo continuo para el cual las funciones $\Phi(\alpha, \beta)$, que describen la ley de composición en términos de coordenadas locales, son *analíticas* en su dominio de definición.

Sean a, b dos elementos de un grupo de Lie G contenidos en un entorno de la identidad. Sea $c = a \cdot b$, y supongamos que todos esos elementos son suficientemente próximos de la identidad como para que puedan ser referidos a un mismo sistema local de coordenadas: $\phi_e(e) = \mathbf{0}$, $\phi_e(a) = \alpha$, $\phi_e(b) = \beta$, $\phi_e(c) = \gamma$. Entonces,

$$\gamma^\mu = \Phi^\mu(\alpha, \beta) \tag{4.2.2}$$

[2] Marius Sophus Lie (1842 - 1899).

donde en el segundo miembro aparecen funciones analíticas de todas sus variables, las que pueden ser desarrolladas en serie de Taylor[3] dentro de su círculo de convergencia. Por lo dicho anteriormente, los coeficientes de esos desarrollos no sólo permiten describir localmente la ley de composición, sino que también contienen información sobre las propiedades globales del grupo.

Ejemplo 4.6. Los siguientes son ejemplos de grupos de lie:

- El grupo de dilataciones en un espacio vectorial E, $x \mapsto a\,x$, con $x \in E$ y $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$, es un grupo de Lie de dimensión 1. La ley de composición es analítica en sus dos argumentos, $\Phi(a,b) = ab$.
- El grupo de traslaciones en $\mathbb{R}^n$, para el cual $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ es un grupo de Lie n-dimensional donde la ley de composición es $\Phi(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, analítica en todos sus argumentos.
- Todos los grupos de matrices que hemos definido anteriormente son grupos de Lie. Por ejemplo, si $U \in U(n) \Rightarrow U^\dagger U = \mathbf{1_n}$. Esta relación impone $n + 2n(n-1)/2 = n^2$ condiciones (reales), lo que deja n^2 parámetros reales independientes que determinan la matriz U. Entonces $U(n)$ es un grupo de Lie de dimensión n^2.
- Al subgrupo invariante $SU(n)$ se le impone además que $\det U = e^{i\theta} = 1 \Rightarrow \theta = 0$, lo que elimina un parámetro real adicional. Por lo tanto, se trata de un grupo de Lie de $\dim SU(n) = n^2 - 1$.
- Similarmente, los grupos ortogonales son grupos de Lie de dimensión $\dim O(n) = \dim SO(n) = n^2 - \{n + n(n-1)/2\} = n(n-1)/2$.

Un grupo de Lie se dice **simple** si no contiene subgrupos de Lie propios invariantes.

Un grupo de Lie se dice **semi-simple** si no contiene subgrupos de Lie propios Abelianos invariantes.

4.3. Propiedades globales de grupos conexos - Primer grupo de homotopía

Consideremos la variedad del grupo $U(1)$, la circunferencia $\mathcal{S}^1$. Se trata de un grupo conexo, pero existen diversas formas *no equivalentes* de conectar dos elementos de $U(1)$ mediante una curva sobre la variedad. En efecto, partiendo del primer elemento, es posible dar n vueltas a la circunferencia, en un sentido o en el otro,

[3]Brook Taylor (1685 - 1731).

antes de alcanzar el segundo elemento. Esas curvas son *no equivalentes* en el sentido de que no es posible deformar *con continuidad* (sin salirse de la variedad) una de ellas en otra que dé un número diferente de vueltas sobre la circunferencia.

Esa noción puede hacerse más precisa introduciendo el **primer grupo de homotopía** de la variedad $\mathcal{M}$. Para ello, consideremos las curvas continuas sobre la variedad que empiezan y terminan en un mismo punto (es decir, aplicaciones de la circunferencia sobre la variedad, $\pi : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{M}$).

Se dice que dos curvas son **homotópicas** si es posible deformar una en la otra de manera continua, mediante desplazamientos sobre la variedad. Esto constituye una relación de equivalencia que permite definir clases de equivalencia de curvas homotópicas o **clases de homotopía**.

Dado que todas la curvas comienzan y terminan en el mismo punto, es posible definir una operación de composición entre clases de homotopía, donde el resultado de la composición de dos clases es la clase que contiene a la curva que se obtiene de prolongar una curva representante de la primera clase poniendo a continuación de ella una representante de la segunda clase.

Puede comprobarse que esta operación no depende de las curvas representantes elegidas en cada clase. También que esa ley de composición

a) es asociativa,
b) tiene un elemento neutro que corresponde a la clase de curvas que pueden contraerse con continuidad a un punto (curvas homotópicamente nulas),
c) tiene un inverso para cada clase, correspondiente a la clase que contiene a una curva representante de la primera pero recorrida en sentido opuesto.

En consecuencia, respecto de esa ley de composición, el conjunto de clases de homotopía se estructura como un grupo (discreto), $\Pi_1(\mathcal{M})$, llamado **primer grupo de homotopía** de la variedad.

Se puede demostrar que el primer grupo de homotopía de un grupo de Lie conexo es siempre Abeliano (es decir, no importa en qué orden se compongan las curvas), y que no depende del punto sobre la variedad que se elija como origen de ellas (de modo que simplemente pueden considerarse clases de curvas cerradas sobre $\mathcal{M}$ que, a los efectos de definir una composición, se las deforma con continuidad hasta hacerlas coincidir en un punto).

Una variedad $\mathcal{M}$ se dice **simplemente conexa** si su primer grupo de homotopía es trivial, $\Pi_1(\mathcal{M}) \approx \mathbb{Z}_1$. Si $\Pi_1(\mathcal{M})$ es no trivial, $\mathcal{M}$ es **múltiplemente conexa**.

De acuerdo a las propiedades de sus variedades asociadas, los grupos de matrices son:

Grupo	simplemente conexo	múltiplemente conexo
$GL(n, \mathbb{C})$		$\star$
$SL(n, \mathbb{C})$	$\star$	
$GL(n, \mathbb{R})$		$\star$
$SL(n, \mathbb{R})$		$\star$
$SO(n)$		$\star$
$U(n)$		$\star$
$SU(n)$	$\star$	
$SO(1,1)$	$\star$	
$SO(n,1)$, $n \geq 2$	$\star$	
$Sp(2n, \mathbb{R})$		$\star$
$Sp(2n, \mathbb{C})$	$\star$	
$Sp(n)$	$\star$	

En particular,

$$\Pi_1\left(SL(n,\mathbb{R})\right) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}\,, n=2 \\ \mathbb{Z}_2\,, n>2 \end{cases}$$

$$\Pi_1\left(SO(n)\right) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}\,, n=2 \\ \mathbb{Z}_2\,, n>2 \end{cases} \tag{4.3.1}$$

$$\Pi_1\left(Sp(2n,\mathbb{R})\right) \approx \mathbb{Z}\,.$$

Ejemplo 4.7. El grupo $O(2)$, que ya hemos considerado, no es conexo. Su componente conexa es el subgrupo $SO(2)$, cuya variedad es una circunferencia $\Rightarrow \Pi_1(SO(2)) \approx \mathbb{Z}$. En efecto, la composición de dos curvas que dan n y m vueltas alrededor de la circunferencia respectivamente es un curva que da $n+m$ vueltas, con $n, m \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 4.8. La variedad del grupo $U(1) \otimes U(1)$ es un **toro** (o, equivalentemente, un rectángulo con los puntos opuestos sobre el borde identificados). Este es un grupo múltiplemente conexo, cuyo grupo de homotopía es $\Pi_1(U(1) \otimes U(1)) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$. En efecto, el par de enteros $\langle n, m\rangle$ que caracterizan a las clases de homotopía se refieren al número de vueltas que las curvas en esa clase describen a lo largo y alrededor del toro respectivamente. La ley de composición corresponde a $\langle n_1, m_1\rangle \cdot \langle n_2, m_2\rangle = \langle n_1+n_2, m_1+m_2\rangle$.

Un grupo de Lie se dice **compacto** si su variedad (entendida como subconjunto de $\mathbb{R}^m$, para algún m) es una región compacta.

Ejemplo 4.9. $SU(2)$ es un grupo compacto y simplemente conexo, de dimensión 3. Sus elementos son matrices unitarias unimodulares de 2×2:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = U^{\dagger} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}, \tag{4.3.2}$$

con $\det U = ad - bc = 1$. Entonces, $d = a^*$, $c = -b^*$.

Por lo tanto,

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \text{ con } \det U = |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{4.3.3}$$

En términos de las partes reales e imaginarias de esos parámetros, $a = x + iy$, $b = z + it$, tenemos

$$\det U = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \tag{4.3.4}$$

lo que determina una (hiper)esfera tridimensional de radio 1 en $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{S}^3$.

De ese modo, cada matriz del grupo $SU(2)$ está en correspondencia uno a uno con los puntos de $\mathcal{S}^3$, que puede ser considerada su variedad asociada.

Se trata evidentemente de una variedad compacta. Además, es simplemente conexa, dado que toda curva cerrada sobre una esfera de dimensión mayor o igual a 2 es homotópicamente nula.

Ejemplo 4.10. El conjunto de las matrices de $SU(2)$ constituye una representación matricial *fiel* de dicho grupo, llamada **representación fundamental**. Esta representación es irreducible puesto que, por ejemplo, las **matrices de Pauli**[4]

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.3.5}$$

que multiplicadas por i son elementos de $SU(2)$, no conmutan entre sí,

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{4.3.6}$$

y por lo tanto no pueden ser simultáneamente diagonalizadas.

Entonces, por el Teorema de Schur, toda matriz C en el centro de $SU(2)$ es proporcional a la identidad,

$$UC = CU, \; \forall U \in SU(2) \Rightarrow C = \lambda \mathbf{1_2}. \tag{4.3.7}$$

Y como $\det C = 1 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Por lo tanto, el centro $\mathcal{C}$ de $SU(2)$ (que es un subgrupo invariante) es de orden 2,

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{1_2}, -\mathbf{1_2}\} \approx \mathbb{Z}_2. \tag{4.3.8}$$

---

[4]Wolfgang Ernst Pauli (1900 - 1958).

Podemos ahora construir el grupo cociente entre $SU(2)$ y su centro, $SU(2)/\mathbb{Z}_2$, cuyos elementos son los cosets de la forma $U\,\mathbb{Z}_2 = \{U, -U\}$. Recordemos que la operación en $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ está dada por

$$U_1\,\mathbb{Z}_2 \cdot U_2\,\mathbb{Z}_2 = (U_1 U_2)\mathbb{Z}_2. \tag{4.3.9}$$

Este grupo es homomorfo a $SU(2)$ por un homomorfismo $\phi : SU(2) \to SU(2)/\mathbb{Z}_2$ tal que $\phi(U) = U\,\mathbb{Z}_2 = \phi(-U)$, cuyo núcleo es el centro de $SU(2)$, $\phi^{-1}\left(\mathbf{1}_2\mathbb{Z}_2\right) = \mathcal{C} \approx \mathbb{Z}_2$.

Como los cosets contienen matrices de $SU(2)$ que sólo difieren en su signo global, los elementos de cada coset corresponden a puntos diametralmente opuestos sobre la variedad $\mathcal{S}^3$.

Entonces, dentro de un entorno suficientemente pequeño de la identidad tendremos una correspondencia uno a uno entre los elementos de $SU(2)$ y los de $SU(2)/\mathbb{Z}_2$, con esencialmente la misma ley de composición (ver ec. (4.3.9)).

Es decir, el homomorfismo $\phi : SU(2) \to SU(2)/\mathbb{Z}_2$ restringido a un entorno de la identidad resulta ser una aplicación biunívoca. Por ese motivo los grupos $SU(2)$ y $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ se dicen **localmente isomorfos**.

Dado que puntos diametralmente opuestos sobre $\mathcal{S}^3$ corresponden al mismo coset, los elementos de $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ pueden ser puestos en correspondencia uno a uno con los de una hemiesfera tridimensional,

$$t = +\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0, \tag{4.3.10}$$

siempre que se tenga en cuenta que puntos diametralmente opuestos sobre su borde

$$t = 0 \Rightarrow \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 1 \tag{4.3.11}$$

corresponden al mismo elemento del grupo.

Vemos entonces que la variedad del grupo $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ tiene la topología de una esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$ (incluido su interior), con los puntos diametralmente opuestos sobre su borde identificados:

$$0 \leq \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \leq 1, \ \text{con} \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}, \ \text{si} \ \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 1. \tag{4.3.12}$$

Para esta variedad hay sólo dos clases de curvas homotópicas:

- las curvas homotópicamente nulas, que pueden ser contraídas a un punto con continuidad,
- y las curvas homotópicas a un diámetro, que en esta variedad es una curva cerrada.

En efecto, es fácil ver que curvas cerradas que reaparecen un número par de veces por las antípodas son homotópicamente nulas, mientras que las que emplean esa posibilidad un número impar de veces son deformables con continuidad a un diámetro de la esfera.

Por lo tanto, $\Pi_1\left(SU(2)/\mathbb{Z}_2\right) \approx \mathbb{Z}_2$, de modo que ese grupo de Lie es compacto y *doblemente conexo.*

Ejemplo 4.11. Los elementos del grupo de rotaciones $SO(3)$ (que ya hemos considerado) están unívocamente determinados por un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$, que apunta en la dirección del eje de rotación, y por el ángulo de rotación $\theta \in [-\pi, \pi]$, siempre que se tenga en cuenta que rotar en un ángulo $-\pi$ alrededor de un eje es equivalente a rotar en $+\pi$ alrededor del mismo eje.

Entonces, los elementos de $SO(3)$ están en correspondencia uno a uno con los puntos de una esfera de radio π en $\mathbb{R}^3$ (incluido su interior), que tiene identificados los puntos diametralmente opuestos sobre su borde. En consecuencia, la variedad de $SO(3)$ tiene la misma topología[5] que la del grupo $SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

Por lo tanto, $SO(3)$ es un grupo de Lie compacto y doblemente conexo, $\Pi_1\left(SO(3)\right) \approx \mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 4.12. Teniendo en cuenta que los elementos de $SO(n)$, con $n > 3$, corresponden a las operaciones de rotación (módulo 2π) sobre planos definidos de $\mathbb{R}^n$ que contienen el origen, un razonamiento similar al anterior permite mostrar que esos grupos también son doblemente conexos.

Ejemplo 4.13. Se puede mostrar que el grupo $SU(n)$ es compacto y simplemente conexo. Además, su representación fundamental (fiel, ya que coincide con el propio grupo) es irreducible.

En consecuencia, por el teorema de Schur, su centro $\mathcal{C}$ (subgrupo invariante) contiene matrices proporcionales a la identidad, tales que $\det(\lambda \mathbf{1_n}) = \lambda^n = 1 \Rightarrow \lambda_p = e^{2i\pi p/n}$, con $p = 0, 1, \ldots, n-1$. Es decir, $\mathcal{C} \approx \mathbb{Z}_n$.

El grupo cociente $SU(n)/\mathbb{Z}_n$ (cuyos elementos son los cosets $U\,\mathbb{Z}_n$) es homomorfo a $SU(n)$ por un homomorfismo $\phi : SU(n) \to SU(n)/\mathbb{Z}_n$ de núcleo $\phi^{-1}(e_{SU(n)/\mathbb{Z}_n}) = \mathcal{C} \approx \mathbb{Z}_n$. Pero en un entorno suficientemente pequeño de la identidad, este homomorfismo establece una correspondencia biunívoca entre los elementos de esos dos grupos, los que entonces resultan localmente isomorfos.

[5]Más adelante mostraremos que $SO(3) \approx SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

Sobre la variedad del grupo cociente $SU(n)/\mathbb{Z}_n$ podemos trazar *curvas cerradas* (que unen elementos en el centro de $SU(n)$) de la forma

$$U_p(\alpha) = \text{diag}\left(e^{2i\pi\alpha p/n}, \ldots, e^{2i\pi\alpha p/n}, e^{-2i\pi(n-1)\alpha p/n}\right), \tag{4.3.13}$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$ y $p = 0, 1, \ldots, n-1$, tales que

$$U_p(\alpha = 0) = \mathbf{1_n}, \quad U_p(\alpha = 1) = e^{2i\pi p/n}\mathbf{1_n}. \tag{4.3.14}$$

Nótese que $U_p(\alpha)^\dagger = U_p(\alpha)^{-1}$ y

$$\det U_p(\alpha) = e^{2i\pi(n-1)\alpha/n} e^{-2i\pi(n-1)\alpha/n} = 1, \ \forall \, \alpha. \tag{4.3.15}$$

Por otra parte, la composición de $U_p(\alpha)$ con $U_q(\alpha)$ resulta en una curva homotópica a $U_{p+q|_{mod\, n}}(\alpha)$. En efecto, podemos tomar

$$U(\alpha) := \begin{cases} U_p(2\alpha)\,, & 0 \leq \alpha \leq 1/2\,, \\ \\ e^{2i\pi p/n} U_q(2\alpha - 1)\,, & 1/2 \leq \alpha \leq 1\,, \end{cases} \tag{4.3.16}$$

que está en la misma clase de homotopía que $U_{p+q|_{mod\, n}}(\alpha)$. En efecto,

$$U(0) = \mathbf{1_n}, \quad U(1/2) = e^{2i\pi p/n}\mathbf{1_n}, \quad U(1) = e^{2i\pi p/n} e^{2i\pi q/n}\mathbf{1_n} = e^{\frac{2i\pi}{n}(p+q)|_{mod\, n}}\mathbf{1_n}. \tag{4.3.17}$$

Entonces, para $SU(n)/\mathbb{Z}_n$ existen n clases de curvas homotópicas (caracterizadas por contener a las $U_p(\alpha)$), y el primer grupo de homotopía es $\Pi_1(SU(n)/\mathbb{Z}_n) \approx \mathbb{Z}_n$.

En resumen, el grupo $SU(n)/\mathbb{Z}_n$, compacto y múltiplemente conexo, tiene un primer grupo de homotopía que es isomorfo al núcleo del homomorfismo que lo relaciona con $SU(n)$,

$$\Pi_1(SU(n)/\mathbb{Z}_n) \approx \mathbb{Z}_n \approx \phi^{-1}(e_{SU(n)/\mathbb{Z}_n}). \tag{4.3.18}$$

Este resultado es un caso particular de un teorema de validez general, que se enuncia en la siguiente Sección.

4.4. Grupo de cubrimiento universal

Señalemos primero que homomorfismos de núcleo discreto respecto de un mismo grupo de Lie simplemente conexo (relaciones que en un entorno de la identidad se reducen a isomorfismos locales), permiten ordenar a los grupos de Lie conexos en **clases de grupos localmente isomorfos**. Dos grupos de Lie están en la misma clase si ambos son homomorfos a un mismo grupo de Lie simplemente conexo por un homomorfismo de núcleo discreto.

Teorema 4.3. *Dado un grupo de Lie conexo G, con un primer grupo de homotopía (discreto) $\Pi_1(G) = H$, existe un grupo de Lie simplemente conexo $\overline{G}$, al cual G es homomorfo por un homomorfismo $\phi : \overline{G} \to G$ de núcleo $\phi^{-1}(e_G) \approx H$. Además, en esas condiciones es $G \approx \overline{G}/H$.*

El grupo $\overline{G}$ es llamado **grupo de cubrimiento universal** de (la clase de grupos localmente isomorfos a) G.

Ejemplo 4.14. Los grupos $SO(n)$ con $n \geq 3$ son doblemente conexos. En consecuencia, existen grupos simplemente conexos localmente isomorfos a cada uno de ellos, sus respectivos grupos de cubrimiento, que son llamados genéricamente $\mathrm{Spin}(n)$. Más adelante mostraremos que $\mathrm{Spin}(3) = SU(2)$.

Ahora veremos que todos los grupos de Lie conexos pertenecientes a una clase de grupos localmente isomorfos pueden ser construidos a partir del grupo de cubrimiento universal de esa clase.

En efecto, sea H un subgrupo propio discreto invariante de un grupo de Lie simplemente conexo $\overline{G}$. Entonces, el grupo cociente $G = \overline{G}/H$ es un grupo de Lie mútiplemente conexo, homomorfo a $\overline{G}$ por un homomorfismo de núcleo H, y que resulta localmente isomorfo a $\overline{G}$.

En consecuencia, la enumeración de todos los grupos localmente isomorfos a un grupo de Lie simplemente conexo $\overline{G}$ se reduce a la determinación de todos sus subgrupos discretos invariantes.

Así, la clasificación de todos los grupos de Lie conexos se reduce a la determinación de todos los grupos de Lie simplemente conexos y de sus subgrupos discretos invariantes.

En particular, dos grupos de Lie conexos localmente isomorfos son

a) o bien globalmente isomorfos,

b) o bien ambos homomorfos a un mismo grupo de Lie simplemente conexo.

Por lo anteriormente dicho, si $\overline{G}$ es simplemente conexo, todo grupo de Lie conexo G localmente isomorfo a $\overline{G}$ puede obtenerse como el grupo cociente $\overline{G}/H \approx G$, donde $H = \{h_1 = e, h_2, \dots, h_k, \dots\}$ es un subgrupo discreto invariante de $\overline{G}$.

En esas condiciones, dado $g \in \overline{G}$,

$$g \cdot h_k \cdot g^{-1} = h_l \in H. \tag{4.4.1}$$

Nótese que en el miembro de la izquierda se puede modificar con continuidad a g, que es un elemento genérico de $\overline{G}$, mientras que el miembro de la derecha está fijo, puesto que H es discreto.

Además, como $\overline{G}$ es simplemente conexo, el elemento g se conecta con el neutro e mediante una curva continua sobre el grupo, $g \mapsto e$, lo que implica que es posible variar con continuidad el primer miembro de la ec. (4.4.1) de manera tal que $g \cdot h_k \cdot g^{-1} \mapsto e \cdot h_k \cdot e^{-1} = h_k$. Y este elemento debe coincidir con el del segundo miembro de la ec. (4.4.1).

Por lo tanto, $\forall\, h_k \in H$ tenemos

$$g \cdot h_k \cdot g^{-1} = h_k \Rightarrow g \cdot h_k = h_k \cdot g,\ \forall\, g \in \overline{G}. \qquad (4.4.2)$$

En consecuencia, todo subgrupo discreto invariante H de $\overline{G}$ está contenido en su centro[6]. Esto implica, en particular, que todo subgrupo discreto invariante de $\overline{G}$ es Abeliano.

Sea $\mathcal{C}$ el centro de un grupo de Lie simplemente conexo $\overline{G}$, y sea $H \subset \mathcal{C}$ un subgrupo propio discreto invariante. El grupo cociente $G = \overline{G}/H$ es homomorfo (y localmente isomorfo) a $\overline{G}$ por un homomorfismo de núcleo H.

Teniendo en cuenta que los puntos en la variedad de $\overline{G}$ identificados con los elementos de H corresponden al mismo elemento (coset) de $\overline{G}/H$, se concluye que las clases de homotopía de G contienen curvas *cerradas* que conectan la identidad con los distintos elementos de H, $e \mapsto h_k$. Dado que la composición de dos de tales curvas, $e \mapsto h_k = h_k \cdot e \mapsto h_k \cdot h_l$, corresponde a una curva homotópica a $e \mapsto (h_k \cdot h_l)$, se ve que el primer grupo de homotopía de $G = \overline{G}/H$ es $\Pi_1(\overline{G}/H) \approx H$, en concordancia con el teorema anterior.

No obstante, los grupos de homotopía no clasifican, en general, a los grupos de Lie conexos localmente isomorfos a $\overline{G}$. En efecto, es posible que dentro del centro $\mathcal{C}$ de $\overline{G}$ puedan hallarse dos subgrupos invariantes distintos pero isomorfos,

$$H_1, H_2 \subset \mathcal{C}, \quad H_1 \neq H_2, \qquad H_1 \approx H_2. \qquad (4.4.3)$$

En ese caso, los grupos cociente $G_1 = \overline{G}/H_1$ y $G_2 = \overline{G}/H_2$ tendrán grupos de homotopía isomorfos, $\Pi_1(G_1) \approx H_1 \approx H_2 \approx \Pi_1(G_2)$, pero en general no serán globalmente isomorfos entre sí, $G_1 \not\approx G_2$.

El caso de $SU(2)$ es particular, porque su centro $\mathcal{C} \approx \mathbb{Z}_2$ no tiene subgrupos propios, de modo que sólo se tienen dos posibilidades,

$$\Pi_1(SU(2)) \approx \mathbb{Z}_1, \quad \Pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2. \qquad (4.4.4)$$

Todo otro grupo localmente isomorfo a $SU(2)$ (grupo de cubrimiento de su clase)

[6]Las representaciones fundamentales de los grupos clásicos de matrices son irreducibles, lo que implica que los elementos en el centro del grupo son todos proporcionales a la matriz identidad.

- o bien es simplemente conexo y, por lo tanto, globalmente isomorfo a $SU(2)$,
- o bien es doblemente conexo y, por lo tanto, globalmente isomorfo a $SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

Finalmente, consideremos una representación matricial $D(G)$ del grupo $G \approx \overline{G}/H$. Dado que existe un homomorfismo $\phi : \overline{G} \to G$, ella induce una representación matricial para el grupo $\overline{G}$, definida por $\Gamma(\overline{g}) := D(\phi(\overline{g}))$, con $\overline{g} \in \overline{G}$. En efecto, $\forall\, \overline{g}_1, \overline{g}_2 \in \overline{G}$ tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma(\overline{g}_1)\Gamma(\overline{g}_2) = D(\phi(\overline{g}_1))D(\phi(\overline{g}_2)) = \\ = D(\phi(\overline{g}_1) \cdot \phi(\overline{g}_2)) = D(\phi(\overline{g}_1 \cdot \overline{g}_2)) = \Gamma(\overline{g}_1 \cdot \overline{g}_2).\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Pero si $\Gamma(\overline{G})$ es una representación del grupo $\overline{G}$, ella dará lugar, en general, a una **representación proyectiva** (o multivaluada) de G. En efecto, si $\phi^{-1}(e_G) = H \neq \{e_{\overline{G}}\}$, entonces habrá varias matrices de la representación $\Gamma(\overline{G})$ por cada elemento $g \in G$, las que diferirán entre sí en el producto por la matriz correspondiente a algún elemento de H. Si $\Gamma(\overline{G})$ es una representación irreducible, entonces $\Gamma(h_k) \sim \mathbf{1}_r$ en virtud del Lema de Schur, dado que H está contenido en el centro de $\overline{G}$.

Una representación de $\overline{G}$ sólo inducirá una representación ordinaria de G si

$$\Gamma(h_k) = \Gamma(e_{\overline{G}}) = \mathbf{1}_r,\ \forall\, h_k \in H = \phi^{-1}(e_G). \tag{4.4.6}$$

En ese caso se puede establecer un homomorfismo entre $\overline{G}/H \approx G$ y el grupo de matrices $\{\overline{\Gamma}(\overline{g} \cdot H) := \Gamma(\overline{g}),\ \forall\, \overline{g} \cdot H \in \overline{G}/H\}$, y definir $D(g) := \Gamma(\overline{g})$, donde $g = \phi(\overline{g})$.

En consecuencia, el problema de la determinación de las representaciones de un grupo de Lie conexo G se reduce a hallar todas las representaciones ordinarias de su grupo de cubrimiento $\overline{G}$, para luego seleccionar de entre ellas las representaciones ordinarias del primero.

Bibliografía:

- H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symmétries des Particules Elémentaires*. Gordon and Breach, New York, 1967.
- R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1974.
- J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Academic Press, 1984.
- Brian C. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*, Springer, 2003.

- E. Wigner, *Group theory: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Academic Press, New York, 1959.
- Hermann Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Courier Dover Publications, 1950.

Capítulo 5

ALGEBRAS Y GRUPOS DE LIE

5.1. Introducción a las álgebras de Lie

Consideremos una función escalar a valores complejos definida sobre la variedad de un grupo de Lie conexo G de dimensión n, $F : G \to \mathbb{C}$. Referida a un sistema local de coordenadas establecido alrededor de un elemento genérico $b \in G$ (en el cual b tiene asignadas coordenadas $(\beta^1, ..., \beta^n)$), se tiene que

$$F(b) = f(\beta^1, ..., \beta^n), \tag{5.1.1}$$

que supondremos diferenciable.

Por multiplicación a izquierda por $a \in G$, el elemento $a^{-1} \cdot b$ es aplicado en el elemento b. Podemos entonces definir una función *trasladada* por a según

$$\left(T_a F\right)(b) := F(a^{-1} \cdot b), \tag{5.1.2}$$

donde T_a es definido como un operador lineal sobre el espacio lineal de las funciones sobre G. El conjunto de operadores $\{T_a, a \in G\}$ constituye una representación lineal del grupo G. En efecto,

$$\left(T_a T_b F\right)(c) = T_a \left(F(b^{-1} \cdot c)\right) \tag{5.1.3}$$

y, llamando $H(c) \equiv F(b^{-1} \cdot c)$,

$$\begin{aligned} \left(T_a H\right)(c) = H(a^{-1} \cdot c) = F(b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot c) = \\ = F((a \cdot b)^{-1} \cdot c) \equiv \left(T_{a \cdot b} F\right)(c), \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

cualesquiera que sean $a, b \in G$, y $\forall F(c)$. Por lo tanto,

$$T_a T_b = T_{a \cdot b}, \ \forall a, b \in G. \tag{5.1.5}$$

Supongamos ahora que el elemento a está en un entorno del elemento identidad, e, y que respecto de un sistema local de coordenadas tenemos la asignación

$$\begin{aligned} & a \to (\alpha^1, ..., \alpha^n), \\ & e \to (0, ..., 0), \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

de modo que al elemento $c = a^{-1} \cdot b$, contenido en un entorno de b, le correspondan las coordenadas $c \to (\gamma^1, ..., \gamma^n)$, dadas por

$$\gamma^\mu = \phi^\mu(\bar{\alpha}, \beta), \tag{5.1.7}$$

donde las coordenadas $\bar{\alpha}^\mu$ corresponden al elemento a^{-1}.

En el sistema local de coordenadas establecido alrededor de e tenemos

$$\phi^\mu(\bar{\alpha}, \alpha) = \varepsilon^\mu = 0, \ \forall \alpha. \tag{5.1.8}$$

Como se trata de un grupo de Lie, esa función puede ser desarrollada en serie de potencias de sus argumentos, y teniendo en cuenta que $e \cdot a = a = a \cdot e$ para todo a, se ve fácilmente que[1]

$$\bar{\alpha}^\mu = -\alpha^\mu + \mathcal{O}(\alpha)^2, \ \mu = 1, 2, ..., n. \tag{5.1.12}$$

Desarrollando en serie de potencias el miembro de la derecha en (5.1.7), y teniendo en cuenta que necesariamente $\phi^\mu(0, \beta) = \beta^\mu$, resulta

$$\gamma^\mu = \beta^\mu - \alpha^\nu \left(\frac{\partial \phi^\mu(\bar{\alpha}, \beta)}{\partial \bar{\alpha}^\nu} \right)_{\bar{\alpha}=0} + \mathcal{O}(\alpha)^2. \tag{5.1.13}$$

Dado que existe la inversa de cada elemento en G, podemos escribir $a = b \cdot c^{-1}$, de modo que la relación entre $(\gamma - \beta)^\mu$ y α^μ establecida en la anterior ecuación debe ser invertible. Esto implica que

$$\det \left(\frac{\partial \phi^\mu(\bar{\alpha}, \beta)}{\partial \bar{\alpha}^\nu} \right)_{\bar{\alpha}=0} \neq 0. \tag{5.1.14}$$

Reemplazando (5.1.13) en la expresión de la función trasladada $T_a F$,

$$\begin{aligned} T_a F(b) = F(a^{-1} \cdot b) = f(\gamma) = \\ f(\beta) - \alpha^\nu \left(\frac{\partial \phi^\mu(\bar{\alpha}, \beta)}{\partial \bar{\alpha}^\nu} \right)_{\bar{\alpha}=0} \frac{\partial f}{\partial \beta^\mu}(\beta) + \mathcal{O}(\alpha)^2 = \\ \left\{ 1 - i\alpha^\nu \left(\frac{\partial \phi^\mu(\bar{\alpha}, \beta)}{\partial \bar{\alpha}^\nu} \right)_{\bar{\alpha}=0} \left(-i \frac{\partial}{\partial \beta^\mu} \right) + \mathcal{O}(\alpha)^2 \right\} f(\beta), \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

[1] En efecto, para $\bar{a}$ y a genéricos en un entorno de la identidad podemos escribir

$$\phi^\mu(\bar{\alpha}, \alpha) = A^\mu + B^\mu_\nu \, \bar{\alpha}^\nu + B'^\mu_\nu \, \alpha^\nu + \dots \tag{5.1.9}$$

Tomando $\bar{a} = e$ tenemos

$$\phi^\mu(0, \alpha) = \alpha^\mu \Rightarrow A^\mu = 0, \ B'^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu. \tag{5.1.10}$$

Similarmente, si $a = e \Rightarrow B^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$. Por lo tanto,

$$\phi^\mu(\bar{\alpha}, \alpha) = \bar{\alpha}^\mu + \alpha^\mu + \dots \tag{5.1.11}$$

de donde surge que los operadores diferenciales (con coeficientes dependientes de las coordenadas β)

$$\hat{X}_\nu(\beta) = \left(\frac{\partial\phi^\mu(\bar{\alpha},\beta)}{\partial\bar{\alpha}^\nu}\right)_{\bar{\alpha}=0}\left(-i\frac{\partial}{\partial\beta^\mu}\right), \tag{5.1.16}$$

ofician de **generadores** de las traslaciones sobre la variedad en el espacio de las funciones escalares diferenciables definidas sobre el grupo G, obteniendo para los **operadores de traslación** T_a la realización

$$T_a = 1 - i\alpha^\nu \hat{X}_\nu(\beta) + \mathcal{O}(\alpha)^2\,. \tag{5.1.17}$$

Teniendo en cuenta que los operadores diferenciales $(-i\partial/\partial\beta^\mu)$, generadores de las traslaciones a lo largo de los ejes coordenados, constituyen un conjunto de n operadores linealmente independientes, y que la matriz en el miembro derecho de (5.1.16) es invertible, vemos que los $\hat{X}_\mu$ conforman una base del espacio lineal (n-dimensional) de los operadores diferenciales de primer orden. Este espacio vectorial es isomorfo al espacio tangente, por lo que ambos suelen identificarse. En ese sentido puede decirse que, para elementos a próximos de la identidad y al más bajo orden en las coordenadas, los operadores T_a difieren del operador identidad en $(-i)$ veces un vector del **espacio tangente** a la variedad del grupo[2].

Consideremos ahora una representación matricial no trivial de dimensión r del grupo G, la que puede ser entendida como una función a valores matriciales definida sobre la variedad: $D(b), \forall\, b \in G$. Su trasladada por multiplicación a izquierda por a es

$$T_a D(b) := D(a^{-1}\cdot b) = D(a^{-1})D(b) = (D(a))^{-1}\, D(b), \tag{5.1.18}$$

lo que nos provee de una **representación matricial** para los operadores de traslación en términos de *matrices constantes* (independientes del punto b sobre la variedad). En efecto,

$$\begin{gathered} T_a T_b D(c) = T_a D(b^{-1}\cdot c) = T_a\,(D(b))^{-1}\,D(c) = (D(b))^{-1}\,D(a^{-1}\cdot c) = \\ (D(b))^{-1}\,(D(a))^{-1}\,D(c) = (D(a\cdot b))^{-1}\,D(c) = T_{a\cdot b}D(c). \end{gathered} \tag{5.1.19}$$

Para traslaciones infinitesimales, esto proporciona también una **representación matricial para los generadores** $\hat{X}_\nu$: por analogía con (5.1.17) escribimos

$$(D(a))^{-1} = \mathbf{1} - i\alpha^\mu X_\mu + \mathcal{O}(\alpha^2), \tag{5.1.20}$$

[2]Nótese que, por multiplicación por un elemento fijo $b \in G$, un sistema local de coordenadas en un entorno de e es aplicado en un sistema local en un entorno de b. En consecuencia, el espacio tangente a la variedad en cualquier punto b es isomorfo al espacio tangente en e.

o bien, al mismo orden en α,

$$D(a) = \mathbf{1} + i\alpha^\mu X_\mu + \mathcal{O}(\alpha^2), \tag{5.1.21}$$

donde ahora las X_μ son *matrices constantes* de dimensión $r \times r$. Es decir, las matrices que representan a elementos a próximos de e difieren de la matriz identidad (al más bajo orden en las coordenadas de a) en i veces un vector del espacio lineal generado por las matrices X_μ, $\mu = 1, 2, ..., n$. Este espacio lineal tiene la misma dimensión que el grupo de Lie si la representación es *localmente* fiel. Si la representación es irreducible, entonces el conjunto de vectores de ese espacio no deja invariante ningún subespacio propio del espacio de la representación.

Consideremos, como antes, dos elementos a y b en un entorno de la identidad e, con sus respectivas coordenadas, $(\alpha^1, ..., \alpha^n)$ y $(\beta^1, ..., \beta^n)$. El elemento $c = a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$ será en general diferente de e (a menos que el grupo sea Abeliano) y, para α^μ y β^μ suficientemente pequeños, estará contenido en el mismo entorno de e, pudiendo ser referido al mismo sistema local de coordenadas, $c \to (\gamma^1, ..., \gamma^n)$. Tratándose de un grupo de Lie, las γ^μ son funciones analíticas de α^ν y de β^ν, pudiendo ser desarrolladas en serie de potencias:

$$\begin{gathered}\gamma^\mu = \psi^\mu(\alpha, \beta) = \mathbf{A}^\mu + \alpha^\nu \mathbf{B}_\nu{}^\mu + \beta^\nu \mathbf{B}'_\nu{}^\mu + \\ + \alpha^\nu \beta^\lambda \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu + \alpha^\nu \alpha^\lambda \mathbf{D}_{\nu\lambda}{}^\mu + \beta^\nu \beta^\lambda \mathbf{D}'_{\nu\lambda}{}^\mu + \mathcal{O}(\alpha, \beta)^3.\end{gathered} \tag{5.1.22}$$

Pero si tomamos $a = e$ $(\alpha^\mu = 0)$, entonces $c = e$ $(\gamma^\mu = 0)$ para todo b $(\forall \beta)$. Similarmente, con $b = e$ $(\beta^\mu = 0)$, también tenemos $c = e$ $(\gamma^\mu = 0)$ para todo a $(\forall \alpha)$. De ello resulta que

$$\mathbf{A}^\mu = \mathbf{B}_\nu{}^\mu = \mathbf{B}'_\nu{}^\mu = \mathbf{D}_{\nu\lambda}{}^\mu = \mathbf{D}'_{\nu\lambda}{}^\mu = 0. \tag{5.1.23}$$

En consecuencia, las coordenadas de c están dadas (al más bajo orden) por

$$\gamma^\mu = \alpha^\nu \beta^\lambda \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu + \mathcal{O}(\alpha, \beta)^3, \tag{5.1.24}$$

donde las **constantes de estructura**, $\mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu$, son características de la ley de composición del grupo en un entorno de la identidad (si bien, evidentemente, dependen de la elección del sistema local de coordenadas).

Tomando $a = b$, resulta que $c = e$, o bien $\gamma^\mu = \varepsilon^\mu = 0$. Entonces, para coordenadas α^μ arbitrarias tenemos que $\alpha^\nu \alpha^\lambda \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu = 0$, lo que significa que las constantes de estructura son *antisimétricas* en el primer par de índices,

$$\mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu = - \mathbf{C}_{\lambda\nu}{}^\mu. \tag{5.1.25}$$

Los elementos contenidos en entornos de la identidad de dos grupos de Lie localmente isomorfos están en correspondencia biunívoca con el mismo conjunto de coordenadas locales, y como localmente tienen la misma ley de composición, resulta que tienen las mismas constantes de estructura. Por lo tanto, las constantes de estructura son una característica del *grupo de cubrimiento universal* de la clase a la que pertenece el grupo de Lie considerado.

Inversamente, se puede demostrar que dos grupos que tienen el mismo conjunto de constantes de estructura (respecto de sendos sistemas locales de coordenadas adecuadamente elegidos) son localmente isomorfos y, en consecuencia, ambos homomorfos a un mismo grupo de Lie simplemente conexo. En ese sentido, las constantes de estructura determinan *localmente* las propiedades de *todos* los grupos de esa clase de equivalencia en un entorno de su elemento neutro e, de modo que ellas deben ser también compatibles con las diferentes propiedades globales de esos grupos.

Consideremos nuevamente la representación matricial del grupo. Para los elementos a y b próximos de e podemos escribir

$$\begin{aligned} D(a) &= \mathbf{1} + A, \\ D(b) &= \mathbf{1} + B, \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= i\alpha^{\nu} X_{\nu} + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ B &= i\beta^{\nu} X_{\nu} + \mathcal{O}(\beta^2). \end{aligned} \tag{5.1.27}$$

Sus inversas son

$$\begin{aligned} (D(a))^{-1} &= \mathbf{1} - A + A^2 + ..., \\ (D(b))^{-1} &= \mathbf{1} - B + B^2 + ..., \end{aligned} \tag{5.1.28}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} D(c) &= D(a)D(b)\,(D(a))^{-1}\,(D(b))^{-1} = \\ &= \{\mathbf{1} + A + B + AB\}\,\{\mathbf{1} - B + B^2 + ... - A + AB + A^2 + ...\} = \\ &= \mathbf{1} + (AB - BA) + ... = \mathbf{1} + C\,, \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

donde

$$C = i\gamma^{\mu} X_{\mu} + ... = i\alpha^{\nu}\beta^{\lambda} \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^{\mu} X_{\mu} + \mathcal{O}(\alpha, \beta)^3. \tag{5.1.30}$$

Por lo tanto

$$C = [A, B] + ... \Rightarrow$$
$$i\alpha^\nu \beta^\lambda \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu X_\mu = -\alpha^\nu \beta^\lambda \left[X_\nu, X_\lambda\right], \ \forall \alpha, \beta, \tag{5.1.31}$$

lo que implica que las matrices que representan a los generadores satisfacen el álgebra de conmutadores

$$[X_\nu, X_\lambda] = -i\, \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu X_\mu, \tag{5.1.32}$$

cualquiera que sea la representación del grupo considerada.

Similarmente, si tomamos el producto $T_c = T_a T_b T_{a^{-1}} T_{b^{-1}}$, a partir del desarrollo (5.1.17) se puede demostrar que

$$\left[\hat{X}_\nu(x), \hat{X}_\lambda(x)\right] = i\, \mathbf{C}_{\nu\lambda}{}^\mu \hat{X}_\mu(x), \tag{5.1.33}$$

(con un cambio de signo en el segundo miembro respecto de (5.1.32) - ver (5.1.17) y (5.1.21)). Cabe señalar que en esta igualdad aparecen las *mismas* constantes de estructura que en (5.1.32), a pesar de que los operadores diferenciales de primer orden $\hat{X}_\mu(x)$ tienen coeficientes dependientes de las coordenadas x sobre la variedad (*Teorema de Lie*).

Como los generadores $\hat{X}_\mu(x)$ constituyen una base del *espacio tangente*, la operación de conmutación de (5.1.33) introduce en ese espacio una operación bilineal, antisimétrica y no asociativa entre vectores, que le confiere la estructura de un **álgebra de Lie**. El espacio vectorial generado por las matrices X_μ, que satisfacen las reglas de conmutación de la ec. (5.1.32), constituye una **representación matricial del álgebra de Lie**.

Como hemos dicho antes, el valor numérico de las constantes de estructura depende de la elección del sistema local de coordenadas en un entorno de e. A un cambio en el sistema de coordenadas, que haga que las nuevas coordenadas se obtengan de las anteriores mediante una transformación lineal homogénea,

$$a \to (\alpha')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \alpha^\nu,$$
$$b \to (\beta')^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \beta^\nu, \tag{5.1.34}$$

le corresponde un nuevo conjunto de generadores, $\hat{X}'_\mu$, con $\mu = 1, 2, ..., n$, que también es una base del espacio tangente.

Los elementos del álgebra de Lie pueden ser referidos a distintas bases de ese espacio vectorial, de modo que *un mismo vector* puede ser escrito como

$$(\alpha')^\mu \hat{X}'_\mu = \alpha^\mu \hat{X}_\mu, \tag{5.1.35}$$

lo que es cierto para todo α. Pero esto requiere que los generadores se transformen como

$$\hat{X}'_\mu \Lambda^\mu{}_\nu = \hat{X}_\nu. \tag{5.1.36}$$

De ese modo tenemos, por una parte,

$$\left[\hat{X'}_\lambda, \hat{X'}_\kappa\right] = i\, \mathbf{C'}_{\lambda\kappa}{}^\rho \hat{X'}_\rho \tag{5.1.37}$$

mientras que, empleando (5.1.36), resulta

$$\begin{aligned}\left[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu\right] &= \Lambda^\lambda{}_\mu \Lambda^\kappa{}_\nu \left[\hat{X}'_\lambda, \hat{X}'_\kappa\right] = i\, \Lambda^\lambda{}_\mu \Lambda^\kappa{}_\nu \mathbf{C'}_{\lambda\kappa}{}^\rho \hat{X}'_\rho = \\ &= i\, \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^\sigma \hat{X}_\sigma = i\, \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^\sigma \Lambda^\rho{}_\sigma \hat{X'}_\rho.\end{aligned} \tag{5.1.38}$$

Como los generadores $\hat{X}'_\mu$ son linealmente independientes, se deduce que las constantes de estructura se transforman (frente a las transformaciones lineales de coordenadas como en (5.1.34)) como las componentes de un tensor dos veces covariante y una vez contravariante,

$$\Lambda^\lambda{}_\mu \Lambda^\kappa{}_\nu \mathbf{C'}_{\lambda\kappa}{}^\rho = \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^\sigma \Lambda^\rho{}_\sigma. \tag{5.1.39}$$

La operación introducida en el álgebra de Lie no es asociativa, sino que satisface las **identidades de Jacobi**[3],

$$\left[\left[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu\right], \hat{X}_\rho\right] + \left[\left[\hat{X}_\nu, \hat{X}_\rho\right], \hat{X}_\mu\right] + \left[\left[\hat{X}_\rho, \hat{X}_\mu\right], \hat{X}_\nu\right] = 0, \tag{5.1.40}$$

igualdades algebraicas que se verifican fácilmente desarrollando los conmutadores según su definición[4].

Reemplazando los conmutadores de los generadores, y teniendo en cuenta que éstos son linealmente independientes, se obtienen las **identidades de Bianchi**[5] para las constantes de estructura,

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta}{}^\sigma \mathbf{C}_{\sigma\gamma}{}^\rho + \mathbf{C}_{\beta\gamma}{}^\sigma \mathbf{C}_{\sigma\alpha}{}^\rho + \mathbf{C}_{\gamma\alpha}{}^\sigma \mathbf{C}_{\sigma\beta}{}^\rho = 0\,, \tag{5.1.41}$$

las que entonces no son todas independientes.

---

[3]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851).

[4]Las identidades de Jacobi,

$$\left[\hat{X}_\rho, \left[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu\right]\right] = \left[\hat{X}_\mu, \left[\hat{X}_\rho, \hat{X}_\nu\right]\right] + \left[\left[\hat{X}_\rho, \hat{X}_\mu\right], \hat{X}_\nu\right],$$

tienen la misma forma que la derivada de un producto de funciones,

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\, g(x)\right) = f(x)\, \frac{dg(x)}{dx} + \frac{df(x)}{dx}\, g(x),$$

razón por la cual la operación en el álgebra de Lie también es la llamada **derivada de Lie**.

[5]Luigi Bianchi (1856 - 1928).

Introducimos ahora un conjunto de n matrices de dimension $n \times n$, M_μ, cuyos elementos son proporcionales a las constantes de estructura del grupo:

$$(M_\mu)_\nu{}^\rho := i\,\mathbf{C}_{\mu\nu}{}^\rho. \tag{5.1.42}$$

El conmutador de dos cualesquiera de ellas está dado por

$$\begin{array}{c} [M_\mu, M_\nu]_\alpha{}^\beta = (M_\mu)_\alpha{}^\rho\,(M_\nu)_\rho{}^\beta - (M_\nu)_\alpha{}^\rho\,(M_\mu)_\rho{}^\beta = \\ \\ -\mathbf{C}_{\mu\alpha}{}^\rho\mathbf{C}_{\nu\rho}{}^\beta + \mathbf{C}_{\nu\alpha}{}^\rho\mathbf{C}_{\mu\rho}{}^\beta = \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^\rho\mathbf{C}_{\rho\alpha}{}^\beta = -i\,\mathbf{C}_{\mu\nu}{}^\rho\,(M_\rho)_\alpha{}^\beta\,, \end{array} \tag{5.1.43}$$

donde hemos usado las identidades de Bianchi.

En consecuencia, las matrices así definidas constituyen una representación matricial de los generadores del álgebra de Lie del grupo, llamada **representación adjunta**,

$$[M_\mu, M_\nu] = -i\,\mathbf{C}_{\mu\nu}{}^\rho M_\rho. \tag{5.1.44}$$

Evidentemente, la representación adjunta contiene la misma información sobre la ley de composición del grupo que el conjunto de sus constantes de estructura[6].

Se puede demostrar que la representación adjunta de un álgebra de Lie simple es fiel e irreducible.

[6]Se define la **forma de Killing** (Wilhelm Killing (1847 - 1923)) de un álgebra de Lie como la matriz real simétrica cuyos elementos están dados por

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{tr}\,\{M_\mu\,M_\nu\} = -\,\mathbf{C}_{\mu\alpha}{}^\beta\,\mathbf{C}_{\nu\beta}{}^\alpha = g_{\nu\mu}. \tag{5.1.45}$$

Se puede demostrar que un álgebra de Lie es *semi-simple* (es decir, que corresponde a un grupo de Lie que no contiene subgrupos de Lie invariantes que sean Abelianos - ver Sección 5.8) si y sólo si su forma de Killing es regular (es decir, si $\det g \neq 0$). En esas condiciones, su inversa existe y satisface $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu{}^\nu$.

Por otra parte, un grupo de Lie semi-simple es *compacto* si y sólo si la forma de Killing de su álgebra es *positiva definida* (con nuestra definición, que difiere en un signo de la definición habitual).

Las nuevas constantes definidas por

$$\mathbf{C}_{\mu\nu\lambda} := \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^\rho\,g_{\rho\,\lambda} = -\,\mathbf{C}_{\mu\nu}{}^\rho\,\mathbf{C}_{\rho\alpha}{}^\beta\,\mathbf{C}_{\lambda\beta}{}^\alpha \tag{5.1.46}$$

son *totalmente antisimétricas* en sus tres índices. En efecto, empleando las identidades de Bianchi resulta que

$$\mathbf{C}_{\mu\nu\lambda} = \left\{\mathbf{C}_{\nu\alpha}{}^\rho\,\mathbf{C}_{\rho\mu}{}^\beta\,+\,\mathbf{C}_{\alpha\mu}{}^\rho\,\mathbf{C}_{\rho\nu}{}^\beta\right\}\mathbf{C}_{\lambda\beta}{}^\alpha = i\,\mathrm{tr}\,\{M_\mu\,M_\nu\,M_\lambda\,-\,M_\mu\,M_\lambda\,M_\nu\}\,, \tag{5.1.47}$$

donde el miembro de la derecha es antisimétrico debido a las propiedades de invarianza cíclica la traza.

En particular, la forma de Killing de un grupo de Lie semi-simple compacto puede ser diagonalizada mediante una transformación lineal de generadores (o, lo que es lo mismo, un cambio lineal de coordenadas), de modo que $g_{\mu\nu} \to \delta_{\mu\nu}$, lo que lleva a las constantes de estructura a una forma en que resultan completamente antisimétricas.

Consideremos ahora una representación matricial del álgebra de Lie de G, en la cual los generadores estén representados por matrices X_μ que satisfacen (5.1.32). Las matrices correspondientes a elementos a próximos de e serán de la forma

$$D(a(\alpha)) = \mathbf{1} + i\,\alpha^\mu X_\mu + \mathcal{O}(\alpha^2), \tag{5.1.50}$$

donde las α^μ son las coordenadas de a correspondientes a esa elección de una base para el álgebra de Lie.

Consideremos, en particular, los elementos correspondientes a matrices de la forma

$$\mathbf{1} + i\frac{\tau}{N}\,\alpha^\mu X_\mu + \mathcal{O}(\frac{1}{N^2}), \tag{5.1.51}$$

donde los α^μ son parámetros finitos dados, τ toma valores continuos y $N \gg 1$. Estos elementos pueden ser multiplicados por sí mismos N veces para alcanzar otros que (para N grande) estarán *alejados* de e y representados por matrices

$$\begin{array}{c} \left(\mathbf{1} + i\frac{\tau}{N}\,\alpha^\mu X_\mu + \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})\right)^N = \\ \prod_{k=1}^N e^{i\frac{\tau}{N}\,\alpha^\mu X_\mu}\left(1+\mathcal{O}(\frac{1}{N^2})\right) = e^{i\tau\alpha^\mu X_\mu}\left(1+\mathcal{O}(\frac{1}{N})\right). \end{array} \tag{5.1.52}$$

En el límite $N \to \infty$ obtenemos la matriz

$$D(a(\tau\alpha)) := e^{i\tau\alpha^\mu X_\mu}, \tag{5.1.53}$$

relación que puede ser entendida como la *asignación* de los n parámetros $\tau\alpha^\mu$ al elemento que denotamos por $a(\tau\alpha) \in G$.

Como el parámetro τ es arbitrario, vemos que cada *recta* que pasa por el origen en el álgebra de Lie (espacio tangente a la variedad en e) es aplicada en elementos de G que satisfacen

$$\begin{array}{c} D(a(\tau_1\alpha))D(a(\tau_2\alpha)) = e^{i\tau_1\alpha^\mu X_\mu}\, e^{i\tau_2\alpha^\mu X_\mu} = \\ e^{i(\tau_1+\tau_2)\alpha^\mu X_\mu} = D(a(\tau_2\alpha))D(a(\tau_1\alpha)). \end{array} \tag{5.1.54}$$

Hendrik Casimir (1909 - 2000) ha demostrado que toda álgebra de Lie semi-simple posee un **invariante cuadrático** definido por

$$\hat{K} = g^{\mu\nu}\,\hat{X}_\mu\,\hat{X}_\nu, \tag{5.1.48}$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la inversa de la forma de Killing. En efecto, a partir de (5.1.33) resulta inmediato mostrar que $\hat{K}$ conmuta con los generadores,

$$\begin{array}{c} \left[\hat{K},\hat{X}_\lambda\right] = g^{\mu\nu}\left[\hat{X}_\mu,\hat{X}_\lambda\right]\hat{X}_\nu + g^{\mu\nu}\,\hat{X}_\mu\left[\hat{X}_\nu,\hat{X}_\lambda\right] = \\ = i\,\mathbf{C}_{\mu\lambda\sigma}\,g^{\sigma\rho}\,g^{\mu\nu}\left(\hat{X}_\rho\,\hat{X}_\nu + \hat{X}_\nu\,\hat{X}_\rho\right) = 0, \end{array} \tag{5.1.49}$$

como consecuencia de la antisimetría de las constantes $\mathbf{C}_{\mu\lambda\sigma}$.

Y como eso vale para toda representación matricial de G (incluso para las representaciones fieles), los elementos que hemos identificado como $a(\tau\alpha)$ (con α^μ fijo y para todo τ) pertenecen a un **subgrupo Abeliano unidimensional** de G.

Puede demostrarse que todo elemento de un grupo de Lie conexo *compacto* G pertenece a un subgrupo Abeliano unidimensional de G. Por lo tanto, la matriz que lo representa en una dada representación matricial del grupo siempre se puede obtener por *exponenciación* de un elemento (de la representación matricial) del álgebra de Lie.

En particular, por exponenciación de vectores en la representación adjunta del álgebra de Lie obtenemos las matrices de la **representación adjunta del grupo** G considerado,

$$D_{Adj}(a(\tau\alpha^1, ..., \tau\alpha^n)) = e^{i\,\tau\,\alpha^\mu M_\mu}, \tag{5.1.55}$$

que, si bien localmente fiel, no es en general una representación fiel de G.

Nótese que para cada subgrupo de Lie unidimensional *compacto* la curva descrita sobre la variedad de G por los elementos de la forma $a(\tau\alpha)$ debe ser necesariamente *cerrada*. Dicho de otro modo, las matrices $D(a(\tau\alpha))$ deben ser funciones periódicas de τ para toda representación del grupo G. Las representaciones fieles de G permiten determinar el rango de valores que toma el parámetro τ, mientras que para las que no lo son, en general, las matrices $D(a(\tau\alpha))$ se repetirán sobre ese rango.

En el caso de grupos de Lie conexos *no compactos*, existen elementos que no yacen sobre ningún subgrupo Abeliano unidimensional, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1. Consideremos el grupo conexo $SL(2, \mathbb{R})$. Sus elementos son matrices reales de determinante $\det M = 1$. Podemos parametrizarlas de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A+D & B+C \\ C-B & A-D \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}, \tag{5.1.56}$$

de modo que

$$\det M = \left(A^2 - D^2\right) - \left(C^2 - B^2\right) = \left(A^2 + B^2\right) - \left(C^2 + D^2\right) = 1\,. \tag{5.1.57}$$

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos escribir

$$\begin{aligned} A &= \cosh\alpha\, \cos\beta\,, \quad B = \cosh\alpha\, \sin\beta\,, \\ C &= \sinh\alpha\, \sin\gamma\,, \quad D = \sinh\alpha\, \cos\gamma\,, \end{aligned} \tag{5.1.58}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta, \gamma \in [0, 2\pi)$, de donde resulta que se trata de un grupo de Lie de dimensión 3.

Como estas matrices no son periódicas en el parámetro α, este grupo es no compacto. Además, como $(A^2+B^2) = \cosh\alpha^2 \geq 1$, se ve que es múltiplemente conexo, con $\Pi_1\left(SL(2,\mathbb{R})\right) \approx \mathbb{Z}$. Por otra parte, la traza de estas matrices,

$$\mathrm{tr}M = 2A = 2\cosh\alpha\,\cos\beta \tag{5.1.59}$$

puede tomar todos los valores reales.

En particular, este grupo contiene elementos de la forma

$$M(r) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{5.1.60}$$

que corresponden a tomar

$$\tanh\alpha = \frac{r^2-1}{r^2+1}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0. \tag{5.1.61}$$

Mostraremos que estas matrices, con $r \geq 2$, no pueden ser escritas como $M = e^{\mathcal{A}}$, con $\mathcal{A}$ real y de traza nula[7]. Por lo tanto, esos elementos no yacen sobre ningún subgrupo Abeliano unidimensional de $SL(2,\mathbb{R})$.

En efecto, si $M \in SL(2,\mathbb{R})$ se puede escribir como $M = e^{\mathcal{A}}$, la condición $\det M = 1$ implica que $\mathrm{tr}\mathcal{A} = 0$. Por lo tanto

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \tag{5.1.66}$$

su determinante es

$$\det\mathcal{A} = -\left(a^2+bc\right), \tag{5.1.67}$$

---

[7]Si M es una matriz (regular) de un grupo de matrices conexo, es posible trazar una curva continua sobre la variedad del grupo, $M(t)$ (que supondremos diferenciable), tal que $M(0) = \mathbf{1}$ y $M(1) = M$. Podemos escribir

$$M(t+\delta t) = M(t) + \delta M(t) = M(t)\left(\mathbf{1} + M^{-1}(t)\delta M(t)\right), \tag{5.1.62}$$

y para su determinante

$$\begin{gathered} \det M(t+\delta t) = \det M(t)\det\left(\mathbf{1} + M^{-1}(t)\delta M(t)\right) = \\ \det M(t)\left(1 + \mathrm{tr}\left[M^{-1}(t)\delta M(t)\right] + \dots\right), \end{gathered} \tag{5.1.63}$$

a menos de términos de orden superior en $\delta M(t)$. Pero entonces,

$$\frac{d}{dt}\ln\det M(t) = \mathrm{tr}\left[M^{-1}(t)\frac{dM(t)}{dt}\right] \equiv \frac{d}{dt}\mathrm{tr}\ln M(t). \tag{5.1.64}$$

Y como $\ln\det M(0) = 0 = \mathrm{tr}\ln M(0)$, resulta que

$$\ln\det M = \mathrm{tr}\ln M. \tag{5.1.65}$$

y su cuadrado es

$$\mathcal{A}^2 = (-\det \mathcal{A})\, \mathbf{1}_2. \tag{5.1.68}$$

De esto se deduce fácilmente que

$$M = e^{\mathcal{A}} = \cosh(\sqrt{-\det \mathcal{A}})\, \mathbf{1}_2 + \frac{\sinh(\sqrt{-\det \mathcal{A}})}{\sqrt{-\det \mathcal{A}}}\, \mathcal{A}, \tag{5.1.69}$$

de modo que su traza

$$\mathrm{tr} M = 2 \cosh(\sqrt{-\det \mathcal{A}}). \tag{5.1.70}$$

Como $\mathcal{A}$ es una matriz real, $\det \mathcal{A} \in \mathbb{R}$, y en cualquier caso $\mathrm{tr} M \geq -2$.

Pero, como hemos señalado antes, existen en $SL(2,\mathbb{R})$ matrices $M(r)$, como en (5.1.60) con $r \geq 2$, cuyas trazas son

$$\mathrm{tr} M(r) = -r - 1/r < -2 \tag{5.1.71}$$

y que, por lo tanto, no son de la forma $e^{\mathcal{A}}$.

No obstante, $M(r)$ puede ser escrita como[8]

$$M(r) = -\mathbf{1}_2 \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} = e^{i\pi\, \sigma_2}\, e^{\ln(r)\, \sigma_3}, \tag{5.1.73}$$

donde ambos factores en el miembro de la derecha son elementos del grupo $SL(2,\mathbb{R})$, puesto que son exponenciales de matrices reales y de traza nula.

El anterior resultado refleja el hecho de validez general de que *todo* elemento de un grupo de Lie conexo no compacto puede ser representado como el producto de un número finito (y pequeño) de elementos que yacen sobre subgrupos Abelianos unidimensionales. En consecuencia, las matrices de una dada representación del grupo pueden ser obtenidas como producto de un número finito de exponenciales de elementos en la correspondiente representación del álgebra de Lie del grupo.

En consecuencia, el conocimiento de una representación matricial del álgebra de Lie de un grupo de Lie conexo permite reconstruir (mediante la aplicación exponencial) la correspondiente representación matricial del grupo.

Ejemplo 5.2. El **grupo de Heisenberg**[9] real.

---

[8] Esta matriz también puede ser escrita como una única exponencial de la forma

$$M(r) = e^{i\pi\, \sigma_3}\, e^{\ln(r)\, \sigma_3} = e^{i\pi\, \sigma_3 + \ln(r)\, \sigma_3}, \tag{5.1.72}$$

pero en este caso *el exponente no es una matriz real* y, por lo tanto, no es el producto de i por un elemento del álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{R})$.

[9] Werner Karl Heisenberg (1901 - 1976).

Consideremos el conjunto H de matrices regulares de la forma

$$M(a,b,c) := \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.1.74}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Resulta inmediato verificar que $\det M = 1$, que la inversa de $M(a,b,c)$ está dada por

$$M(a,b,c)^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & -a & -b+ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.75}$$

y que ese conjunto es cerrado frente a la multiplicación de matrices,

$$M(a,b,c)M(a',b',c') = \begin{pmatrix} 1 & a+a' & b+b'+ac' \\ 0 & 1 & c+c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.1.76}$$

operación que en ese conjunto resulta no conmutativa.

Por lo tanto, H constituye un grupo de Lie no Abeliano no compacto de dimensión 3 con la topología de $\mathbb{R}^3$.

A partir de la ec. (5.1.76) se ve que el centro de H, $\mathcal{C}(H)$, está formado por las matrices de la forma

$$M(0,b,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.1.77}$$

con $b \in \mathbb{R}$, lo que corresponde a un subgrupo de Lie Abeliano unidimensional invariante. En consecuencia, el grupo de Heisenberg no es semi-simple.

El grupo cociente $H/\mathcal{C}(H)$ tiene por elementos a los cosets $M(a,b,c)\,\mathcal{C}(H)$, conjuntos formados por los elementos de la forma

$$M(a,b,c)M(0,b',0) = \begin{pmatrix} 1 & a & b+b' \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall\, b' \in \mathbb{R}. \tag{5.1.78}$$

La operación entre cosets está definida por

$$\left(M(a,b,c)\,\mathcal{C}(H)\right) \cdot \left(M(a',b',c')\,\mathcal{C}(H)\right) := \left(M(a,b,c)M(a',b',c')\right)\mathcal{C}(H)\,. \tag{5.1.79}$$

El hecho de que

$$\left[M(a,b,c)\,, M(a',b',c')\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac'-a'c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.80}$$

muestra que $M(a,b,c)M(a',b',c')$ y $M(a',b',c')M(a,b,c)$ pertenecen al mismo coset, de modo que el grupo cociente $H/\mathcal{C}(H)$ es Abeliano.

Para determinar el álgebra de Lie de este grupo debemos considerar matrices próximas de la identidad, $M = \mathbf{1}_3 + iA$, donde

$$A = -i \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.1.81}$$

Esa matriz pertenece a un espacio lineal de dimensión 3, cuyos generadores pueden ser elegidos como

$$X_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad X_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad X_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.1.82}$$

Los conmutadores entre estas matrices están dados por

$$[X_1, X_2] = -iX_3 \,, \quad [X_1, X_3] = \mathbf{O} \,, \quad [X_2, X_3] = \mathbf{O} \,, \tag{5.1.83}$$

de donde resulta que X_3 es un **elemento central** del álgebra de Lie[10].

Teniendo en cuenta que

$$A^2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad A^3 = \mathbf{O} \,, \tag{5.1.85}$$

vemos que la serie que define la aplicación exponencial se reduce en este caso a sólo tres términos,

$$\exp\{i(\alpha X_1 + \gamma X_2 + \beta X_3)\} = \mathbf{1}_3 + \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.1.86}$$

Comparando con la ec. (5.1.74), vemos que la aplicación exponencial establece una relación biunívoca entre elementos del álgebra de Lie y las matrices del grupo,

$$M(a,b,c) = \exp\{i(\alpha X_1 + \gamma X_2 + \beta X_3)\} \,, \tag{5.1.87}$$

[10] Compárese este resultado con el álgebra de conmutadores entre la coordenada y el impulso conjugado de la Mecánica Cuántica,

$$[P, Q] = -iI \,. \tag{5.1.84}$$

La asociación $P \leftrightarrow X_1$, $Q \leftrightarrow X_2$, $I \leftrightarrow X_3$ es lo que justifica el nombre de este grupo. No obstante, téngase en cuenta que X_3 no es la matriz identidad. De hecho, el álgebra (5.1.84) no admite representaciones matriciales. En efecto, si E fuera el espacio de una representación de dimensión finita, tomando la traza de ambos miembros de (5.1.84) se obtiene $\mathrm{tr}\,(\mathrm{PQ}) - \mathrm{tr}\,(\mathrm{QP}) = 0 = \mathrm{i}\,\mathrm{dim E}$.

con $a = \alpha$, $c = \gamma$ y $b = \beta + \frac{\alpha\gamma}{2}$.

Evidentemente, X_3 es el generador del centro $\mathcal{C}(H)$ (ver ec. (5.1.77)).

La propiedad (5.1.85) hace que en este caso la *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*[11] también se reduzca a un número finito de términos, pudiéndose demostrar de inmediato que para dos matrices A y B en el álgebra de Lie se tiene que

$$e^{iA}\, e^{iB} = e^{i(A+B)-\frac{1}{2}[A,B]} \,. \tag{5.1.88}$$

A partir de las relaciones (5.1.83) podemos obtener la representación adjunta del álgebra,

$$M_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.1.89}$$

que evidentemente no es fiel (el grupo no es semisimple) y corresponde a una acción trivial de los elementos del centro $\mathcal{C}(H)$ (todos ellos asociados a la matriz identidad).

Dado un número real positivo $\hbar$, puede construirse una representación lineal *unitaria* mediante los operadores definidos sobre $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ como

$$W[M(a,b,c)]f(x) := e^{-i\hbar b} e^{i\hbar c x} f(x-a) \,. \tag{5.1.90}$$

En efecto,

$$\begin{array}{c} W[M(a,b,c)]W[M(a',b',c')]f(x) := e^{-i\hbar(b+b')}e^{i\hbar cx}e^{i\hbar c'(x-a)}f(x-a-a') = \\ \\ = W[M(a+a',b+b'+ac',c+c')]f(x) \,, \end{array} \tag{5.1.91}$$

mientras que

$$\| \; W[M(a,b,c)]f(x) \; \|_2 = \| \; f(x) \; \|_2 \ . \tag{5.1.92}$$

Puede demostrarse que para cada valor de $\hbar > 0$ se obtiene de esta manera una representación irreducible del grupo de Heisenberg.

Nótese que la acción de los operadores $W[M(a,b,c)]$ consiste en una traslación de la función en una cantidad a, luego una *traslación* de su transformada de Fourier en una cantidad $\hbar c$, para finalmente multiplicar la función resultante por una constante de módulo 1.

Las únicas representaciones matriciales unitarias de H son representaciones unidimensionales de su representación adjunta, ec. (5.1.89), dadas por

$$w_{A,B}[M(a,b,c)]\, v := e^{i(Aa+Bc)} v \,, \tag{5.1.93}$$

[11] Henry Frederick Baker (1866 - 1956). John Edward Campbell (1862 - 1924). Felix Hausdorff (1868 - 1942).

para $A, B \in \mathbb{R}$.

5.2. Algebras de Lie de los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$

Consideremos la representación fundamental del grupo $SU(2)$. Sus elemento son matrices unitarias de determinante igual a 1. Siendo un grupo de Lie conexo compacto, todos sus elementos pueden escribirse como exponenciales de vectores en el álgebra de Lie, $U = e^{iA}$. Entonces,

$$U^\dagger = e^{-iA^\dagger} = U^{-1} = e^{-iA} \quad \Rightarrow \quad A^\dagger = A\,,$$
$$\ln\det U = \operatorname{tr}\ln U = i\operatorname{tr}A = 0\,. \tag{5.2.1}$$

Por lo tanto, el álgebra de Lie de $SU(2)$ es el espacio vectorial de las matrices de 2×2, autoadjuntas y de traza nula. Su dimensión es 3 (igual a la dimensión de $SU(2)$).

Una base conveniente para ese espacio esta compuesta por las **matrices de Pauli**,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.2.2}$$

que satisfacen

$$\sigma_k^\dagger = \sigma_k,\ \operatorname{tr}\sigma_k = 0,\ \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\,\mathbf{1_2} + i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k, \tag{5.2.3}$$

donde el símbolo ϵ_{ijk} es totalmente antisimétrico, con $\epsilon_{123} = 1$.

Suele tomarse como generadores a $X_k = \sigma_k/2$ de modo que, por cálculo directo, se obtienen (para esa elección) las constantes de estructura[12],

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\,\epsilon_{ijk}\,\frac{\sigma_k}{2} \Rightarrow \mathbf{C}_{ij}{}^{k} = -\epsilon_{ijk}. \tag{5.2.7}$$

[12]Los generadores en la representación adjunta (ver (5.1.42)) de $SU(2)$ son las matrices de elementos $(M_i)_{jk} = i\,\mathbf{C}_{ij}{}^{k} = -i\,\epsilon_{ijk}$,

$$M_1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.2.4}$$

las que también satisfacen

$$[M_i, M_j] = i\,\epsilon_{ijk}\,M_k. \tag{5.2.5}$$

Por otra parte, para esta elección de generadores la *forma de Killing* se reduce a

$$g_{ij} = -\,\epsilon_{ikl}\,\epsilon_{jlk} = 2\,\delta_{ij}. \tag{5.2.6}$$

Como g_{ij} es positiva definida (y, por lo tanto, regular), $SU(2)$ es semi-simple (en rigor, simple) y compacto.

Cada elemento en el álgebra de Lie (combinación lineal de las $\sigma_k/2$) genera un subgrupo Abeliano unidimensional. Tomemos un vector $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$, tal que $n^i n^i = 1$, y llamemos $\hat{\sigma} = n^i \sigma_i$. Su cuadrado es

$$\hat{\sigma}^2 = n^i n^j \, \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2} n^i n^j \, \{\sigma_i, \sigma_j\} = \frac{1}{2} n^i n^j \, 2\delta_{ij} \, \mathbf{1_2} = (\hat{n})^2 \, \mathbf{1_2} = \mathbf{1_2}. \qquad (5.2.8)$$

Entonces, empleando el desarrollo en serie de la exponencial, resulta de inmediato que las matrices en el subgrupo Abeliano generado por $\hat{\sigma}$ son de la forma

$$U(\theta \, \hat{n}) = e^{i \, \theta \, \frac{\hat{\sigma}}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \, \mathbf{1}_2 + i \, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \, \hat{\sigma}. \qquad (5.2.9)$$

Estas son funciones periódicas de la variable θ, de período 4π, para todo $\hat{n}$ (es decir, para toda recta que pasa por el origen del álgebra de Lie), lo que refleja el hecho de que $SU(2)$ es compacto. En particular,

$$U(4\pi \, \hat{n}) = e^{i \, 4\pi \, \frac{\hat{\sigma}}{2}} = \cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) \, \mathbf{1}_2 = \mathbf{1}_2 = U(0 \, \hat{n}), \qquad (5.2.10)$$

para todo $\hat{n}$.

En esas condiciones, podemos describir la variedad (simplemente conexa) del grupo $SU(2)$ como los puntos de una esfera de radio 2π en $\mathbb{R}^3$, con todo su borde identificado con el elemento $-\mathbf{1}_2$. En efecto,

$$U(2\pi \, \hat{n}) = e^{i \, 2\pi \, \frac{\hat{\sigma}}{2}} = \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) \, \mathbf{1}_2 = -\mathbf{1}_2, \qquad (5.2.11)$$

para todo $\hat{n}$. En esta variedad, los subgrupos Abelianos unidimensionales corresponden a diámetros de la esfera (que son líneas cerradas, ya que conectan dos puntos sobre el borde de la variedad).

El grupo $SU(2)/\mathbb{Z}_2$, homomorfo a $SU(2)$, tiene por elementos a los *cosets* $U\mathbb{Z}_2 \equiv \{+U, -U\}$, con $U \in SU(2)$. Dado que

$$-U(\theta \, \hat{n}) = U\left(2\pi(-\hat{n})\right) \, U(\theta \, \hat{n}) = U\left((2\pi - \theta)(-\hat{n})\right), \qquad (5.2.12)$$

vemos que la variedad del grupo $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ puede ser descrita como una esfera de radio π en $\mathbb{R}^3$, con los puntos diametralmente opuestos sobre su borde identificados entre sí. En efecto, las matrices correspondientes a puntos diametralmente opuestos pertenecen al mismo coset,

$$U(\pi \, \hat{n}) = U(2\pi \, \hat{n}) \, U(\pi \, (-\hat{n})) = -U(\pi \, (-\hat{n})), \qquad (5.2.13)$$

y consecuentemente corresponden al mismo elemento del grupo $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ que, de ese modo, resulta doblemente conexo.

Consideremos ahora el grupo $SO(3)$, de matrices ortogonales de 3×3 de determinante 1. Siendo un grupo (doblemente) conexo compacto, todos sus elemento yacen sobre algún subgrupo Abeliano unidimensional, y pueden ser representados como la exponencial de i veces un vector del álgebra de Lie de este grupo. Si $R = e^{A}$, entonces

$$
\begin{gathered}
R^t = e^{A^t} = R^{-1} = e^{-A} \Rightarrow A^t = -A \\
\ln \det R = \operatorname{tr} \ln R = \operatorname{tr} A = 0.
\end{gathered}
\tag{5.2.14}
$$

Es decir, el ágebra de Lie de $SO(3)$ es el espacio vectorial de las matrices reales antisimétricas (y, en consecuencia, de traza nula) multiplicadas por $-i$. Se trata de un espacio de dimensión 3 (igual al número de parámetros independientes del grupo $SO(3)$), en el que podemos adoptar como base el conjunto de matrices

$$
X_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\tag{5.2.15}
$$

(coincidentes con los generadores de $SU(2)$ en la representación adjunta!, ver (5.2.4)) de modo que $A = i\alpha^k X_k$.

Las constantes de estructura de $SO(3)$ correspondientes a esta elección de generadores se obtienen fácilmente por cálculo directo de los conmutadores

$$
[X_i, X_j] = i\, \epsilon_{ijk}\, X_k, \tag{5.2.16}
$$

de modo que también para este grupo resulta que

$$
\mathbf{C}_{ij}{}^{k} = -\epsilon_{ijk}. \tag{5.2.17}
$$

Estas constantes de estructura son idénticas a las antes obtenidas para $SU(2)$, de modo que estos dos grupos son *localmente isomorfos* (en un entorno de la identidad). Entonces $SU(2)$, simplemente conexo, es el *grupo de cubrimiento universal* de la clase de grupos localmente isomorfos a la que pertenece $SO(3)$.

Cada subgrupo Abeliano unidimensional de $SO(3)$ contiene las matrices de la forma $R(\theta\,\hat{n}) = e^{i\,\theta\,\hat{X}}$, donde $\hat{X} = n^k X_k$, con $\hat{n}$ un vector unitario en $\mathbb{R}^3$. Por

ejemplo, para $n^k = \delta^{k3}$, es fácil verificar que[13]

$$(X_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ (X_3)^3 = X_3. \tag{5.2.22}$$

Entonces,

$$R(\theta\, \hat{e}_3) = e^{i\,\theta X_3} = \mathbf{1}_3 + i\sin(\theta)\, X_3 + (\cos(\theta) - 1)\,(X_3)^2. \tag{5.2.23}$$

En particular, $R(2\pi\, \hat{n}_3) = \mathbf{1}_3 = R(0\, \hat{n}_3)$.

La matriz $R(\theta\, \hat{n}_3)$ es una función periódica de θ de período 2π, y lo mismo se verifica para $R(\theta\hat{n})$ cualquiera que sea el vector unitario $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$. De ese modo, la variedad del grupo $SO(3)$ puede ser descrita como una esfera de radio π en $\mathbb{R}^3$, con los puntos diametralmente opuestos sobre su borde identificados entre sí. En efecto,

$$R(\pi\, \hat{n}) = R(2\pi\, \hat{n}) R(\pi\,(-\hat{n})) = R(\pi\,(-\hat{n})), \tag{5.2.24}$$

siendo $SO(3)$ doblemente conexo.

En resumen, $SO(3)$ es localmente isomorfo a $SU(2)$; pero mientras que éste es simplemente conexo, el primer grupo de homotopía de aquél es

$$\Pi_1\,(SO(3)) \approx \mathbb{Z}_2 \approx \Pi_1\,(SU(2)/\mathbb{Z}_2)\,. \tag{5.2.25}$$

Dado que el centro de $SU(2)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, $SO(3)$ sólo puede ser *globalmente isomorfo* a $SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

En consecuencia, $SO(3)$ es homomorfo a $SU(2)$ por un homomorfismo de núcleo $\{\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2\} \approx \mathbb{Z}_2$. Las representaciones de $SU(2)$ serán, en general, *representaciones proyectivas* (bivaluadas) de $SO(3)$. Sólo aquellas para las cuales

$$D(-U) = D(U), \forall U \in SU(2) \Rightarrow D(-\mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_r = D(\mathbf{1}_2) \tag{5.2.26}$$

[13] Para una dirección general,

$$n_k X_k = -i \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (n_k X_k)^2 = \mathbf{1}_3 - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}\,, \tag{5.2.18}$$

y teniendo en cuenta que

$$(n_k X_k)\, \hat{\mathbf{n}} = 0 \tag{5.2.19}$$

vemos que, para $l \geq 0$,

$$(n_k X_k)^0 = \mathbf{1}_3\,, \quad (n_k X_k)^{2l+1} = (n_k X_k)\,, \quad (n_k X_k)^{2l+2} = (n_k X_k)^2\,. \tag{5.2.20}$$

En consecuencia,

$$R(\theta\, \hat{\mathbf{n}}) = e^{i\,\theta n_k X_k} = \mathbf{1}_3 + i\sin\theta\,(n_k X_k) + (\cos\theta - 1)\,(n_k X_k)^2\,. \tag{5.2.21}$$

son representaciones ordinarias de $SO(3)$.

5.3. Algebras de Lie de otros grupos de matrices

Las *representación fundamental* de cada uno de los grupos de matrices que hemos definido ofrece una representación matricial *fiel* para el álgebra de Lie de esos grupos, a partir de la cual es posible deducir la operación entre vectores del álgebra de manera similar a como fue hecho antes para $SU(2)$ y $SO(3)$. Para ello, representamos elementos del grupo como $M = e^{A}$ y establecemos, en cada caso, las condiciones que debe satisfacer la matriz A.

Por ejemplo, para $GL(n,\mathbb{R})$, grupo lineal de matrices (regulares) reales de $n \times n$, A toma valores en el espacio lineal de las matrices reales de $n \times n$. Una base de ese espacio vectorial está dada por las matrices cuyos elementos son todos nulos salvo uno, tomado igual a 1:

$$E_{kl} := |k\rangle \langle l| \equiv \hat{e}_k \left(\hat{e}_l, \cdot\right) \;\Rightarrow\; \left(E_{kl}\right)_{rs} = \delta_{kr}\delta_{ls}, \tag{5.3.1}$$

donde los $\hat{e}_k,\ k = 1, 2, ..., n$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, $\langle k|l\rangle \equiv (\hat{e}_k, \hat{e}_l) = \delta_{kl}$.

Existen n^2 de tales matrices, que pueden ser tomadas como generadores. De ese modo, el álgebra de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ (y, por lo tanto, también el grupo $GL(n,\mathbb{R})$) es de dimensión n^2.

Para determinar las constantes de estructura asociadas con esta elección de generadores hay que calcular sus conmutadores. Teniendo en cuenta que

$$E_{kl}E_{rs} = |k\rangle \langle l|r\rangle \langle s| = \delta_{lr} |k\rangle \langle s| \,, \tag{5.3.2}$$

resulta de inmediato

$$[E_{kl}, E_{rs}] = \delta_{lr}E_{ks} - \delta_{sk}E_{rl}. \tag{5.3.3}$$

Para obtener matrices de $GL(n,\mathbb{C})$ sería necesario considerar combinaciones lineales complejas de los E_{kl}. Pero como debemos describir a los grupos de Lie en términos de parámentros reales, más bien debemos duplicar el número de generadores introduciendo nuevas matrices, definidas como $E'_{kl} = iE_{kl}$, en lo que se conoce como la **complexificación** del álgebra de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$. En consecuencia, el grupo $GL(n,\mathbb{C})$ tiene dimensión $2n^2$.

Para obtener el resto de las constantes de estructura, se deben calcular los conmutadores

$$\begin{aligned} [E_{kl}, E'_{rs}] &= +\delta_{lr}E'_{ks} - \delta_{sk}E'_{rl}, \\ [E'_{kl}, E'_{rs}] &= -\delta_{lr}E_{ks} + \delta_{sk}E_{rl}. \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Si se trata del grupo $SL(n,\mathbb{R})$, **subgrupo unimodular** de $GL(n,\mathbb{R})$, sus elementos son matrices reales de determinante 1. Entonces, si $M = e^{A}$, $\ln\det M = 0$ implica que A tiene traza nula, $\mathrm{tr}A = 0$.

Los generadores de este grupo son combinaciones lineales de los generadores de $GL(n,\mathbb{R})$ con traza nula. Para $k \neq l$, $\mathrm{tr}E_{kl} = 0$, pero $\mathrm{tr}E_{kk} = 1$. Entonces se pueden mantener los primeros, pero es necesario tomar combinaciones de los generadores *diagonales* que tengan traza nula. Por ejemplo, se puede tomar como base del álgebra de Lie de $SL(n,\mathbb{R})$ al conjunto de generadores

$$\begin{gathered} E_{kl},\ k \neq l, \\ (E_{kk} - E_{nn})\,,\ k = 1, 2, ..., n-1, \end{gathered} \tag{5.3.5}$$

lo que corresponde a una dimensión $\dim SL(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1$. Similarmente, $\dim SL(n,\mathbb{C}) = 2(n^2-1)$.

Para los grupos unitarios, con $U = e^{iA}$, la condición $U^\dagger = U^{-1}$ implica $A^\dagger = A$. Es decir, el álgebra de Lie de $U(n)$ es el espacio vectorial de las matrices autoadjuntas de $n \times n$. Sus generadores son combinaciones lineales autoadjuntas de las matrices E_{kl}. Teniendo en cuenta que $E_{kl}^\dagger = (|k\rangle\langle l|)^\dagger = |l\rangle\langle k| = E_{lk}$, vemos que una elección posible es

$$\begin{gathered} M_{kl} = E_{kl} + E_{lk},\ k \geq l, \\ N_{kl} = i\,(E_{kl} - E_{lk})\,,\ k > l, \end{gathered} \tag{5.3.6}$$

de donde resulta que $\dim U(n) = (n + n(n-1)/2) + n(n-1)/2 = n^2$. Las correspondientes constantes de estructura se calculan fácilmente a partir de (5.3.3)[14].

Para el grupo $SU(n)$ se debe imponer además la condición de que los generadores tengan traza nula, lo que requiere tomar, por ejemplo, las combinaciones de

[14] Por ejemplo, para el grupo $U(2)$ tenemos

$$\begin{gathered} M_{11} = \sigma_0 + \sigma_3, \quad M_{22} = \sigma_0 - \sigma_3, \\ M_{21} = \sigma_1, \qquad\quad N_{21} = \sigma_2, \end{gathered} \tag{5.3.7}$$

donde $\sigma_0 = \mathbf{1}_2$. Pero también podemos tomar como base del álgebra de Lie de $U(2)$ directamente a $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, cuyos conmutadores son

$$\begin{gathered} [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k, \\ [\sigma_i, \sigma_0] = 0,\ i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{5.3.8}$$

Esta álgebra se separa en dos subálgebras que conmutan entre sí, lo que refleja el hecho de que $U(2) = U(1) \otimes SU(2)$, de modo que el grupo no es semi-simple y su forma de Killing es singular: $g_{0\mu} = \mathrm{tr}\{M_0\, M_\mu\} = \mathrm{tr}\{O\, M_\mu\} = 0$, para $\mu = 0, 1, 2, 3$.

los generadores diagonales $M_{kk} - M_{nn}$, con $k = 1, 2, ..., n-1$. De ello resulta que $\dim U(n) = n^2 - 1$.

Para los grupos ortogonales, si $R = e^{A}$, la condición $R^t = R^{-1}$ implica $A^t = -A$, de donde resulta que el álgebra de Lie de $SO(n)$ es el espacio lineal de las matrices reales y antisimétricas de $n \times n$, multiplicadas por $(-i)$. Sus generadores pueden ser tomados como

$$N_{kl} = i\left(E_{kl} - E_{lk}\right),\ k > l, \tag{5.3.9}$$

de modo que $\dim SO(n) = n(n-1)/2$. Las constantes de estructura se calculan tomando los conmutadores de los generadores y empleando (5.3.3).

Finalmente, para el grupo $Sp(2n, \mathbb{R})$, adoptando la métrica de Darboux

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1_n} \\ -\mathbf{1_n} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \left[E_{k,k+n} - E_{k+n,k}\right], \tag{5.3.10}$$

la condición $\mathcal{M}^t g \mathcal{M} = g$, con $\mathcal{M} = e^{\mathcal{A}} \simeq \mathbf{1}_{2n} + \mathcal{A}$, implica que

$$g\mathcal{A} = -\mathcal{A}^t g = \left\{g\mathcal{A}\right\}^t, \tag{5.3.11}$$

de modo que $g\mathcal{A}$ pertenece al espacio lineal de las matrices reales simétricas de dimensión $2n$. Una base de dicho espacio puede ser construida como

$$igX_{kl} = M_{kl} = E_{kl} + E_{lk},\ k \geq l = 1, 2, \cdots, 2n, \tag{5.3.12}$$

de modo que

$$\begin{aligned} X_{kl} &= ig\left\{E_{kl} + E_{lk}\right\} = i\sum_{r=1}^{n} \left\{\left(E_{r,r+n} - E_{r+n,r}\right)\left(E_{kl} + E_{lk}\right)\right\} = \\ &= i\sum_{r=1}^{n} \left\{\delta_{r+n,k} E_{r,l} + \delta_{r+n,l} E_{r,k} - \delta_{r,k} E_{r+n,l} - \delta_{r,l} E_{r+n,k}\right\} = \\ &= i\left\{E_{k-n,l} + E_{l-n,k} - E_{k+n,l} - E_{l+n,k}\right\},\ k \geq l = 1, 2, \cdots, 2n, \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

donde $E_{k,l} = 0$ si $k < 0$ o $k > 2n$. Nótese que

$$\mathrm{tr} X_{kl} = i\left\{\delta_{k-n,l} + \delta_{l-n,k} - \delta_{k+n,l} - \delta_{l+n,k}\right\} = 0, \tag{5.3.14}$$

como corresponde al hecho de que las matrices de $Sp\left(2n, \mathbb{R}\right)$ tienen determinante 1.

Estas matrices generan un álgebra de Lie de dimensión

$$\dim sp\left(2n, \mathbb{R}\right) = 2n + 2n(2n-1)/2 = 2n^2 + n = n(2n+1), \tag{5.3.15}$$

cuyas constantes de estructura se evalúan calculando los correspondientes conmutadores. Por otra parte, su complexificación corresponde al álgebra de Lie de $Sp\left(2n, \mathbb{C}\right)$, de dimensión $2n(2n+1)$.

Las matrices próximas de la identidad en el grupo $Sp(n) := U(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{C})$, $\mathcal{M} \simeq \mathbf{1}_{2n} + i\mathcal{A}$, deben satisfacer

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}\,, \quad \{g\mathcal{A}\}^t = g\mathcal{A}\,. \tag{5.3.16}$$

Si escribimos $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, donde los bloques A, B, C, D son de $n \times n$, vemos que la primera de las anteriores condiciones implica que $A^\dagger = A$, $D^\dagger = D$ y $C = B^\dagger$, mientras que la segunda impone que $D = -A^t$ y $B^t = B$. En consecuencia,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & -A^t \end{pmatrix}, \tag{5.3.17}$$

con A autoadjunta y B compleja y simétrica. Nótese que la traza de esa matriz es automáticamente nula.

La matriz A puede expresarse como una combinación lineal *real* de los n^2 generadores de las formas M_{kl} y N_{kl} en (5.3.6), mientras que B debe expresarse como combinaciones lineales *complejas* de los $n + \frac{n(n-1)}{2}$ generadores de la forma M_{kl}. De ese modo, el álgebra de Lie del grupo $Sp(n)$ tiene una dimensión

$$\dim sp(n) = n^2 + 2 \times \left(n + \frac{n(n-1)}{2} \right) = n(2n+1)\,. \tag{5.3.18}$$

Construidos los generadores de acuerdo a esas consideraciones, resulta un ejercicio directo el cálculo de las correspondientes constantes de estructura.

Ejemplo 5.3. Consideremos el álgebra de Lie del grupo $SU(3)$. Una base para el espacio de las matrices de 3×3 autoadjuntas y de traza nula, de dimensión $3^2 - 1 = 8$, está formada por las **matrices de Gell-Mann**[15] definidas por

$$\lambda_1 := E_{12} + E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 := -i\,(E_{12} - E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 := E_{11} - E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 := E_{13} + E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 := -i\,(E_{13} - E_{31}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 := E_{23} + E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

[15]Murray Gell-Mann (1929 -).

$$\lambda_7 := -i\,(E_{23} - E_{32}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$\lambda_8 := \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,(E_{11} + E_{22} - 2E_{33}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\,. \tag{5.3.19}$$

Los generadores del álgebra suelen definirse como $T_k = \frac{\lambda_k}{2}\,, k = 1, 2, \ldots, 8$, de modo que satisfagan que $Tr\,\{T_i T_j\} = \frac{1}{2}\,\delta_{ij}$. Las correspondientes constantes de estructura, que resultan ser completamente antisimétricas, se obtienen calculando los conmutadores

$$[T_i, T_j] = -i f_{ijk} T_k\,. \tag{5.3.20}$$

De ellos se obtiene que

$$f_{123} = -1\,, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -\tfrac{1}{2}\,,$$
$$f_{156} = f_{367} = \tfrac{1}{2}\,, \quad f_{458} = f_{678} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,. \tag{5.3.21}$$

5.4. Medida de integración invariante

Las relaciones de ortogonalidad para grupos de orden finito, así como la equivalencia de toda representación con una representación unitaria, se demuestran haciendo uso de la siguiente propiedad de las sumas sobre los elementos del grupo:

$$\sum_{g\in G} \psi(g \cdot h^{-1}) = \sum_{g'\in G} \psi(g'),\ \forall h \in G. \tag{5.4.1}$$

Para sumas parciales, sobre subconjuntos de G, se tiene

$$\sum_{g\in S\subset G} \psi(g \cdot h^{-1}) = \sum_{g'\in S\cdot h^{-1}\subset G} \psi(g'),\ \forall h \in G. \tag{5.4.2}$$

De existir una propiedad similar para el caso de los grupos continuos, las sumas deberían ser consideradas como integrales sobre la variedad, con una *medida de integración* que dé cuenta de la densidad de elementos del grupo alrededor de cada punto,

$$\int_{S\subset G} d\mu(g)\,\psi(g \cdot h^{-1}) = \int_{S\cdot h^{-1}\subset G} d\mu(g')\,\psi(g'). \tag{5.4.3}$$

Pero, cambiando de *variable de integración* en el miembro de la izquierda, $g \to g' \cdot h$, también resulta

$$\int_{S\subset G} d\mu(g)\,\psi(g \cdot h^{-1}) = \int_{S\cdot h^{-1}\subset G} d\mu(g' \cdot h)\,\psi(g'). \tag{5.4.4}$$

Las igualdades (5.4.3) y (5.4.4) deberían valer $\forall\, S \subset G$, $\forall\, h \in G$, y para toda función $\psi(g)$ definida sobre el grupo, de modo que la medida de integración sobre la variedad debería ser invariante por multiplicación a derecha,

$$d\mu(g \cdot h) = d\mu(g),\ \forall g, h \in G. \tag{5.4.5}$$

Es decir, para el caso de grupos continuos se podrán demostrar propiedades similares a las que valen para grupos de orden finito siempre que se pueda construir una medida de integración **invariante por multiplicación a derecha** (que satisfaga (5.4.5)), tal que su integral sobre la variedad del grupo sea convergente.

Esta invarianza de la medida refleja el hecho de que la multiplicación a derecha por h establece una relación biunívoca (dada la existencia de $h^{-1} \in G$) entre los elementos de un entorno $\mathcal{U}_g$ de g y los de la imagen de ese entorno, $\mathcal{U}_{g\cdot h}$.

En el caso de grupos de Lie, una vez establecidos sistemas de coordenadas locales sobre la variedad del grupo, la medida de integración en el punto g puede ser referida a sus coordenadas β^μ,

$$d\mu(g) = \rho(\beta)\, d^n\beta. \tag{5.4.6}$$

Entonces, la *densidad de elementos* $\rho(\beta)$ debe tener en cuenta la variación que sufre el *volumen* de S_g cuando se lo multiplica a derecha por h para obtener $S_{g\cdot h}$, y esa variación puede ser determinada a partir de la ley de composición en el grupo.

En efecto, sea a un elemento próximo de la identidad, que tiene asignadas coordenadas α^μ en un sistema para el cual las coordenadas de e son $\varepsilon^\mu = 0$, y sea un segundo elemento b de coordenadas β^μ. Las coordenadas del producto $c = a \cdot b$, $\gamma^\mu = \phi^\mu(\alpha, \beta)$, son funciones analíticas de α^μ, de modo que

$$\gamma^\mu - \beta^\mu = \left(\frac{\partial\phi^\mu(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^\nu}\right)\Bigg|_{\alpha=0} \alpha^\nu + \mathcal{O}(\alpha)^2. \tag{5.4.7}$$

En consecuencia, la relación entre un volumen elemental alrededor de e y su imagen por multiplicación a derecha por b está dada por

$$d^n\beta = \left|\det\left(\frac{\partial\phi^\mu(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^\nu}\right)\Bigg|_{\alpha=0}\right|\ d^n\alpha, \tag{5.4.8}$$

donde $\det\left(\frac{\partial\phi^\mu(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^\nu}\right)\Big|_{\alpha=0} \neq 0$ (ver (5.1.14)).

Entonces, tomando $g = b$ y $h = b^{-1}$ en (5.4.5) y (5.4.6), tenemos para una medida invariante a derecha

$$\begin{gathered} d\mu(b \cdot b^{-1}) = d\mu(e) = d\mu(b) \Rightarrow \\ \rho(0)\, d^n\alpha = \rho(\beta)\, d^n\beta = \rho(\beta)\left|\det\left(\frac{\partial\phi^\mu(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^\nu}\right)\Bigg|_{\alpha=0}\right|\ d^n\alpha, \end{gathered} \tag{5.4.9}$$

de donde resulta que

$$\frac{\rho(\beta)}{\rho(0)} = \left|\det\left(\frac{\partial\phi^\mu(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^\nu}\right)\Big|_{\alpha=0}\right|^{-1}. \tag{5.4.10}$$

Esta densidad de elementos, determinada a menos de una constante multiplicativa, permite construir una medida de integración invariante a derecha.

La integral de esta medida invariante sobre una región compacta de la variedad del grupo de Lie considerado permite definir un **volumen invariante a derecha** para dicha región. En particular, el volumen invariante a derecha de (toda) la variedad de un grupo de Lie *compacto* es finito.

En todo grupo de Lie puede construirse de manera similar una medida de integración **invariante por multiplicación a izquierda**, que distinguimos de la anterior introduciendo los subíndices R o L según el caso.

La densidad de elementos que aparece en la expresión de la medida invariante a izquierda está dada por

$$\begin{gathered} d\mu_L(b) = \rho_L(\beta)\, d^n\beta, \\ \frac{\rho_L(\beta)}{\rho_L(0)} = \left|\det\left(\frac{\partial\phi^\mu(\beta,\alpha)}{\partial\alpha^\nu}\right)\Big|_{\alpha=0}\right|^{-1}. \end{gathered} \tag{5.4.11}$$

En ambos casos suele definirse $\rho_L(0) = 1 = \rho_R(0)$.

En principio, las medidas invariantes a derecha e izquierda son diferentes. Sin embargo, en ciertos casos (como el de los *grupos de Lie compactos*) resultan ser iguales.

Si trasladamos un volumen elemental tomado alrededor de e, primero por multiplicación a derecha por b y luego por multiplicación a izquierda por b^{-1}, en general no se vuelve a la región de partida, sino que su imagen tendrá un volumen distorsionado por un factor de amplificación. En efecto,

$$\begin{gathered} d^n\alpha = d\mu_R(e) = d\mu_R(e\cdot b) = \rho_R(\beta)d^n\beta = \\ \left(\frac{\rho_R(\beta)}{\rho_L(\beta)}\right)\rho_L(\beta)d^n\beta = \left(\frac{\rho_R(\beta)}{\rho_L(\beta)}\right)d\mu_L(b) = \\ \left(\frac{\rho_R(\beta)}{\rho_L(\beta)}\right)d\mu_L(b_{-1}\cdot b) = \left(\frac{\rho_R(\beta)}{\rho_L(\beta)}\right)d\mu_L(e) = \left(\frac{\rho_R(\beta)}{\rho_L(\beta)}\right)d^n\alpha^{(1)}, \end{gathered} \tag{5.4.12}$$

es decir,

$$d^n\alpha^{(1)} = \left(\frac{\rho_L(\beta)}{\rho_R(\beta)}\right)d^n\alpha = f(\beta)\, d^n\alpha. \tag{5.4.13}$$

Si sobre el elemento de volumen resultante se realizan nuevamente las traslaciones, a derecha por b y a izquierda por b^{-1}, el volumen resultante aparecerá corregido por el factor de amplificación $(f(\beta))^2$, y en general, tras realizar N veces esa operación,

$$d^n\alpha^{(N)} = (f(\beta))^N \, d^n\alpha. \tag{5.4.14}$$

Pero, dada la asociatividad del producto en G, ese factor es también el que corresponde a la traslación a derecha por b^N y a izquierda por b^{-N}.

Nótese que para todo N finito, esa transformación es *inversible*, siendo su inversa la multiplicación a derecha por b^{-N} y a izquierda por b^N, a la que evidentemente corresponde el factor de amplificación de volumen $(f(\beta))^{-N}$.

Ahora bien, si $f(\beta) > 1$ entonces $(f(\beta))^N$ resulta mayor que cualquier número positivo con sólo tomar N suficientemente grande. Pero eso no es posible en un *grupo de Lie compacto*, puesto que la transformación ha de ser inversible para todo N y el volumen de la variedad en ese caso es finito. En efecto, si $f(\beta) > 1$ en un abierto de volumen finito sobre la variedad, el volumen de la región imagen superaría al de la variedad toda con sólo tomar N suficientemente grande, y en ese caso la transformación no sería biunívoca.

Con un razonamiento similar se muestra que $f(\beta)$ no puede ser menor que 1. Por lo tanto $f(\beta) = 1$, lo que implica la *igualdad de las medidas invariantes a derecha e izquierda para todo grupo de Lie compacto*[16],

$$\rho_L(\beta) = \rho_R(\beta) \Rightarrow d\mu_L(b) = d\mu_R(b), \ \forall\, b \in G. \tag{5.4.15}$$

El **volumen invariante** de un grupo de Lie compacto se define como la integral de la medida invariante (tanto a izquierda como a derecha) sobre su variedad,

$$V[G] := \int_G d\mu(g) < \infty. \tag{5.4.16}$$

Estos resultados permiten mostrar, en particular, que *toda representación matricial de un grupo de Lie compacto es equivalente a una representación unitaria*, así como la *ortogonalidad de las funciones de caracteres de representaciones irreducibles no equivalentes respecto de la medida invariante del grupo.*

5.5. Medida invariante para los grupos $SO(3)$ y $SU(2)$

Para calcular la medida de integración invariante sobre el grupo $SO(3)$, primero notemos que su variedad (una esfera maciza de radio π en $\mathbb{R}^3$ con los puntos diametralmente opuestos sobre su borde identificados entre sí) es simétrica frente

[16]También es posible mostrar la igualdad de las medidas invariantes a izquierda y derecha de, en particular, los grupos *simples* y *semi-simples*.

a rotaciones. Dos rotaciones *en un mismo ángulo* son conjugadas una de la otra, siendo el elemento que las relaciona la rotación que lleva el eje de rotación de la primera a coincidir con el de la segunda. De ese modo, la *densidad de elementos* de $SO(3)$ alrededor de una rotación particular dependerá del ángulo de la rotación, pero no de la dirección de su eje de rotación.

Entonces, sin pérdida de generalidad, consideraremos la medida de integración alrededor del elemento $b \to R(\theta\,\hat{e}_3) = e^{i\,\theta\,X_3}$. Para ello debemos trasladar por multiplicación a derecha por la matriz

$$R(\theta\,\hat{e}_3) = e^{i\,\theta\,X_3} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.5.1}$$

elementos próximos de la identidad que tienen la forma

$$a \to S = e^{i\alpha^k X_k} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\alpha)^2. \tag{5.5.2}$$

Tenemos entonces

$$R' = S\,R(\theta\,\hat{e}_3) = e^{i\,\theta\,X_3} + \begin{pmatrix} -\alpha_3\sin\theta & \alpha_3\cos\theta & -\alpha_2 \\ -\alpha_3\cos\theta & -\alpha_3\sin\theta & \alpha_1 \\ \alpha_1\sin\theta + \alpha_2\cos\theta & -\alpha_1\cos\theta + \alpha_2\sin\theta & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\alpha)^2, \tag{5.5.3}$$

donde R' también puede escribirse de la forma[17]

$$R' = e^{i\,(\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + (\varphi_3+\theta) X_3)} = e^{i\,\theta X_3} +$$

$$\begin{pmatrix} -\varphi_3 \sin\theta & \varphi_3\cos\theta & -\varphi_1\left(\frac{\cos\theta-1}{\theta}\right) - \varphi_2\frac{\sin\theta}{\theta} \\ -\varphi_3\cos\theta & -\varphi_3\sin\theta & \varphi_1\frac{\sin\theta}{\theta} - \varphi_2\left(\frac{\cos\theta-1}{\theta}\right) \\ -\varphi_1\left(\frac{\cos\theta-1}{\theta}\right) + \varphi_2\frac{\sin\theta}{\theta} & -\varphi_1\frac{\sin\theta}{\theta} - \varphi_2\left(\frac{\cos\theta-1}{\theta}\right) & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varphi)^2. \tag{5.5.7}$$

Entonces, a menos de términos de orden $(\alpha)^2$,

$$\varphi_3 = \alpha_3$$

$$\frac{2\sin\theta/2}{\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \tag{5.5.8}$$

de donde resulta que

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = M(\theta)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{5.5.9}$$

con

$$M(\theta) = \frac{\theta}{2\sin\theta/2}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 & 0 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2\sin\theta/2}{\theta} \end{pmatrix}. \tag{5.5.10}$$

En consecuencia, la densidad $\rho(\theta)$, que sólo depende del ángulo θ, está dada por el Jacobiano de esa transformación,

$$\rho(\theta) = \left|\frac{1}{\det M(\theta)}\right| = \frac{4\sin^2(\theta/2)}{\theta^2},\ \forall\hat{n}. \tag{5.5.11}$$

La medida invariante puede escribirse entonces como

$$d\mu_{[SO(3)]}\left(R(\theta\,\hat{n})\right) = \rho(\theta)\,\theta^2\,d\theta\,d\Omega_2 = 4\sin^2(\theta/2)\,d\theta\,d\Omega_2, \tag{5.5.12}$$

---

[17] Téngase en cuenta que, para $n_k\,n_k = 1$,

$$n_k\,X_k = -i\begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.5.4}$$

$$(n_k\,X_k)^2 = \begin{pmatrix} (n_2)^2+(n_3)^2 & -n_1\,n_2 & -n_1\,n_3 \\ -n_1\,n_2 & (n_1)^2+(n_3)^2 & -n_2\,n_3 \\ -n_1\,n_3 & -n_2\,n_3 & (n_1)^2+(n_2)^2 \end{pmatrix} = \mathbf{1_3} - \hat{n}\otimes\hat{n}, \tag{5.5.5}$$

y que

$$(n_k\,X_k)\,\hat{n} = 0 \Rightarrow (n_k\,X_k)^3 = n_k\,X_k. \tag{5.5.6}$$

donde $d\Omega_2$ es el elemento de integración sobre la esfera $\mathcal{S}_2$.

El volumen invariante de este grupo es

$$\begin{aligned} V[SO(3)] &= \int_0^\pi \int_{S^2} 4\sin^2(\theta/2)\, d\theta\, d\Omega_2 = \\ &= 16\pi \int_0^\pi \frac{1-\cos\theta}{2}\, d\theta = 8\pi^2. \end{aligned} \tag{5.5.13}$$

Para hallar la medida invariante para el grupo $SU(2)$, tengamos en cuenta que $SO(3) \approx SU(2)/\mathbb{Z}_2$, y que su variedad es una esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio 2π con su borde identificado con el elemento $-\mathbf{1_2}$.

Por lo tanto, para $\theta < \pi$ la medida invariante de $SU(2)$ coincide con la de $SO(3)$, siendo entonces sólo función de θ. Pero como los elementos de $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ son cosets de la forma $\{U, -U\}$, y están en correspondencia biunívoca con los elementos de $SO(3)$, la medida de integración alrededor de $-U(\theta\,\hat{n}) = U((2\pi-\theta)(-\hat{n}))$ debe ser la misma que alrededor de $U(\theta\,\hat{n})$. En consecuencia, para $\theta > \pi$

$$\begin{aligned} d\mu(U(\theta\,\hat{n})) &= d\mu(U((2\pi-\theta)(-\hat{n}))) = \\ &= 4\left(\sin\left(\frac{2\pi-\theta}{2}\right)\right)^2 d\theta\, d\Omega_2 = 4\sin^2(\theta/2)\, d\theta\, d\Omega_2. \end{aligned} \tag{5.5.14}$$

Por lo tanto, la medida de integración invariante (tanto a izquierda como a derecha) sobre el grupo $SU(2)$ está dada por

$$d\mu_{[SU(2)]}\,(U(\theta\,\hat{n})) = 4\sin^2(\theta/2)\, d\theta\, d\Omega_2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{5.5.15}$$

y el volumen invariante de este grupo es

$$\begin{aligned} V[SU(2)] &= \int_0^{2\pi} \int_{S^2} 4\sin^2(\theta/2)\, d\theta\, d\Omega_2 = \\ &= 16\pi \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\theta}{2}\, d\theta = 16\pi^2. \end{aligned} \tag{5.5.16}$$

5.6. Representaciones unitarias irreducibles del grupo $SU(2)$

Como $SU(2)$ es un grupo de Lie compacto, toda representación matricial es equivalente a una representación unitaria. Entonces, basta con considerar representaciones matriciales del álgebra de Lie de $SU(2)$ cuyos generadores sean matrices autoadjuntas. En efecto, si las matrices J_k satisfacen

$$\begin{aligned} J_k^\dagger &= J_k,\ k = 1, 2, 3, \\ [J_i, J_j] &= i\,\epsilon_{ijk}\, J_k,\ \forall\, i, j, k, \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

entonces las matrices de la representación (obtenidas mediante la aplicación exponencial) son unitarias,

$$\begin{aligned} \left[D\left(U(\theta\,\hat{n})\right)\right]^{\dagger} = \left[e^{i\,\theta\,n^k J_k}\right]^{\dagger} = e^{-i\,\theta\,n^k J_k^{\dagger}} = \\ e^{-i\,\theta\,n^k J_k} = \left[D\left(U(\theta\,\hat{n})\right)\right]^{-1}, \ \forall\, U(\theta\,\hat{n}) \in SU(2). \end{aligned} \tag{5.6.2}$$

Por otra parte, el *invariante cuadrático de Casimir*[18] en esta representación $\mathbf{J}^2 := (J_1)^2 + (J_2)^2 + (J_3)^2$ conmuta con los generadores,

$$\left[\mathbf{J}^2, J_j\right] = J_i\,[J_i, J_j] + [J_i, J_j]\,J_i = i\,\epsilon_{ijk}\,(J_i J_k + J_k J_i) = 0, \tag{5.6.5}$$

por lo que $\mathbf{J}^2$ $(= (\mathbf{J}^2)^{\dagger})$ conmuta con todos los elementos de la representación matricial considerada,

$$\left[\mathbf{J}^2, e^{i\,\theta\,n^k J_k}\right] = 0, \ \forall\,\theta, \hat{n}. \tag{5.6.6}$$

En consecuencia, si se trata de una representación *irreducible*, el Lema de Schur requiere que sea proporcional a la matriz identidad,

$$\mathbf{J}^2 = \lambda \mathbf{1}, \tag{5.6.7}$$

donde el valor de λ (≥ 0 puesto que $\mathbf{J}^2$ es suma de cuadrados de matrices autoadjuntas) caracteriza la representación.

Se trata entonces de construir el espacio de representación correspondiente a una representación unitaria irreducible, caracterizada por un autovalor de $\mathbf{J}^2$ que, por conveniencia, escribiremos como $\lambda = j(j+1)$, con $j \geq 0$.

---

[18]El *invariante fundamental cuadrático* en una dada representación matricial de un álgebra de Lie semi-simple está dado por

$$K = g^{\mu\nu}\,X_\mu\,X_\nu, \tag{5.6.3}$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la inversa de la forma de Killing. Resulta inmediato mostrar que conmuta con los generadores en esa representación,

$$\begin{aligned} [K, X_\lambda] = g^{\mu\nu}\,[X_\mu, X_\lambda]\,X_\nu + g^{\mu\nu}\,X_\mu\,[X_\nu, X_\lambda] = \\ = -i\,\mathbf{C}_{\mu\lambda\sigma}\,g^{\sigma\rho}\,g^{\mu\nu}\,(X_\rho\,X_\nu + X_\nu\,X_\rho) = 0, \end{aligned} \tag{5.6.4}$$

dado que las constantes $\mathbf{C}_{\mu\lambda\sigma}$ son totalmente antisimétricas. En el caso de $SU(2)$, las constantes de estructura son $C_{ij}{}^{k} = -\epsilon_{ijk}$, de modo que $g_{ij} = -\epsilon_{ikl}\epsilon_{jlk} = 2\delta_{ij} \Rightarrow g^{ij} = \frac{1}{2}\delta^{ij}$. No obstante, por conveniencia se lo normaliza como $K \to \mathbf{J}^2 = \delta^{ij} J_i J_j$.

Podemos elegir una base para ese espacio formada por autovectores simultáneos de $\mathbf{J}^2$ y de J_3[19],

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 \, |j\, m\rangle &= j(j+1)\, |j\, m\rangle\,, \\ J_3\, |j\, m\rangle &= m\, |j\, m\rangle\,, \end{aligned} \tag{5.6.8}$$

que supondremos normalizados, $\langle j\, m' \, | j\, m\rangle = \delta_{m'\, m}$ (donde hemos empleado la notación de Dirac para vectores y formas lineales).

Tomando las combinaciones $J_\pm = J_1 \pm i J_2$, las reglas de conmutación (5.6.1) se reducen a

$$\begin{aligned} [J_3, J_\pm] &= \pm J_\pm, \\ [J_+, J_-] &= 2 J_3, \end{aligned} \tag{5.6.9}$$

mientras que por cálculo directo resulta que

$$\begin{aligned} J_- J_+ &= \mathbf{J}^2 - J_3\,(J_3+1) \\ J_+ J_- &= \mathbf{J}^2 - J_3\,(J_3-1)\,. \end{aligned} \tag{5.6.10}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} J_- J_+\, |j\, m\rangle &= \{j(j+1) - m(m+1)\}\, |j\, m\rangle\,, \\ J_+ J_-\, |j\, m\rangle &= \{j(j+1) - m(m-1)\}\, |j\, m\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.6.11}$$

Teniendo en cuenta que $(J_\pm)^\dagger = J_\mp$, las anteriores igualdades implican que

$$\begin{aligned} \| \, J_+\, |j\, m\rangle \, \|^2 &= \langle j\, m|\, J_- J_+\, |j\, m\rangle = (j-m)\,(j+m+1) \geq 0, \\ \| \, J_-\, |j\, m\rangle \, \|^2 &= \langle j\, m|\, J_+ J_-\, |j\, m\rangle = (j+m)\,(j-m+1) \geq 0, \end{aligned} \tag{5.6.12}$$

de donde

$$\left(j^2 - m^2\right) \left((j+1)^2 - m^2\right) \geq 0. \tag{5.6.13}$$

Esas desigualdades son satisfechas sólo si $j^2 \geq m^2$, es decir, si los autovalores de J_3

$$-j \leq m \leq j. \tag{5.6.14}$$

Por otra parte, de (5.6.9) resulta que

$$J_3\,(J_\pm\, |j\, m\rangle) = J_\pm\,(J_3 \pm 1)\, |j\, m\rangle = (m \pm 1) J_\pm\, |j\, m\rangle\,. \tag{5.6.15}$$

---

[19]El **rango** de un álgebra de Lie es el máximo número de generadores que conmutan entre sí. En el caso del grupo $SU(2)$ el rango es 1, de acuerdo a la ec. (5.6.1).

Por lo tanto, por aplicación del operador J_+ (J_-) al vector $|j\,m\rangle$ resulta un nuevo autovector de J_3 con autovalor aumentado (disminuido) en 1:

$$\begin{aligned} J_+ \left|j\,m\right\rangle &= \left\{(j-m)\,(j+m+1)\right\}^{1/2} \left|j\,(m+1)\right\rangle , \\ J_- \left|j\,m\right\rangle &= \left\{(j+m)\,(j-m+1)\right\}^{1/2} \left|j\,(m-1)\right\rangle , \end{aligned} \tag{5.6.16}$$

donde los factores de proporcionalidad han sido fijados de acuerdo con (5.6.12).

Pero como m no puede tomar valores superiores a j, debe existir un valor máximo para el autovalor de J_3, $-j \leq M \leq j$, tal que

$$J_+ \left|j\,M\right\rangle = \mathbf{0}, \tag{5.6.17}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \parallel J_+ \left|j\,M\right\rangle \parallel^2 &= (j-M)\,(j+M+1) = 0 \\ &\Rightarrow M = j. \end{aligned} \tag{5.6.18}$$

A partir de ese vector, por aplicación de J_-, se puede generar el resto de los vectores de la base del espacio de la representación,

$$(J_-)^n \left|j\,M\right\rangle \sim \left|j\,(M-n)\right\rangle , \text{ con } n \in \mathbb{N}. \tag{5.6.19}$$

Pero este espacio es de *dimensión finita* (por tratarse de una representación matricial) y, como hemos visto, los autovalores de J_3 deben ser mayores que $-j$. Esto significa que ese proceso debe terminar para algún entero $n \geq 0$, es decir,

$$J_- \left|j\,(M-n)\right\rangle = \mathbf{0}. \tag{5.6.20}$$

Igualando la norma de este vector a cero,

$$\parallel J_- \left|j\,(M-n)\right\rangle \parallel^2 = (j+M-n)\,(j-M+n+1) = 0, \tag{5.6.21}$$

obtenemos $M = j = n - j$. Es decir, $j = n/2$, con $n \in \mathbb{Z}^+$.

En consecuencia, el espacio de la representación unitaria irreducible de $SU(2)$ caracterizada por el *entero o semientero* $j = n/2$, con $n = 0, 1, \ldots$, está generado por los vectores

$$\left\{\left|j\,m\right\rangle , \; m = -j, -j+1, ..., j-1, j\right\} , \tag{5.6.22}$$

siendo su dimensión $n + 1 = 2j + 1$.

Referidos a esa base, los generadores tienen por elementos de matriz a

$$\begin{aligned}
\langle j\,m'|\,\mathbf{J}^2\,|j\,m\rangle &= j(j+1)\,\delta_{m',m},\\
\langle j\,m'|\,J_3\,|j\,m\rangle &= m\,\delta_{m',m},\\
\langle j\,m'|\,J_+\,|j\,m\rangle &= \{(j-m)\,(j+m+1)\}^{1/2}\;\delta_{m',m+1},\\
\langle j\,m'|\,J_-\,|j\,m\rangle &= \{(j+m)\,(j-m+1)\}^{1/2}\;\delta_{m',m-1}.
\end{aligned} \tag{5.6.23}$$

Por lo dicho anteriormente, vemos que *es posible construir representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$ de cualquier dimensión.*

Para $j=0$, la dimensión del espacio de representación es $2j+1=1$, las matrices que representan a los generadores son todas nulas, y se obtiene la representación trivial del grupo.

Para $j=1/2$, la dimensión es $2j+1=2$, los generadores están dados por

$$\mathbf{J}^2=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ J_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ J_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \tag{5.6.24}$$

es decir,

$$J_1=\frac{1}{2}\,\sigma_1,\ \ J_2=\frac{1}{2}\,\sigma_2,\ \ J_3=\frac{1}{2}\,\sigma_3, \tag{5.6.25}$$

y se obtiene la *representación fundamental* del grupo.

Para $j=1$, la dimensión es $2j+1=3$, $\mathbf{J}^2=2\,\mathbf{1}_3$, y los generadores están dados por

$$J_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ J_+=\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{5.6.26}$$

obteniéndose una *representación equivalente a la adjunta*[20].

---

[20] En efecto,

$$J_3=A^{-1}\,X_3\,A\,,\quad \text{con } A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i&0&i\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}. \tag{5.6.27}$$

En el caso general, $J_3 = \mathrm{diag}(j, j-1, ..., -j+1, -j)$. Entonces, la matriz que corresponde al elemento $-\mathbf{1}_2 \in SU(2)$ se expresa, por ejemplo, como

$$D(U(2\pi\hat{e}_3)) = e^{i2\pi J_3} =$$

$$= \mathrm{diag}\left(e^{i2\pi j}, e^{i2\pi(j-1)}, ..., e^{i2\pi(j-2j+1)}, e^{i2\pi(j-2j)}\right) = \qquad (5.6.28)$$

$$= e^{i2\pi j}\, \mathbf{1}_{2j+1},$$

de modo que esas representaciones son fieles si y sólo si j es un *semientero*.

En esas condiciones (ver (5.2.26)), las representaciones unitarias irreducibles de $SU(2)$ son *representaciones ordinarias* de $SO(3)$ sólo si $e^{i2\pi j} = 1$, es decir, *sólo si j es un entero*: $j = 0, 1, 2, ...$ Por lo tanto, *las representaciones irreducibles del grupo $SO(3)$ son de dimensión impar.*

Similarmente a lo que ocurre con el grupo de rotaciones, $SO(3)$, se puede demostrar que dos elementos de $SU(2)$, $U(\theta'\,\hat{n'})$ y $U(\theta\,\hat{n})$, son conjugados si y sólo si $\theta' = \theta$, cualesquiera que sean los vectores unitarios $\hat{n}$, $\hat{n}' \in \mathbb{R}^3$.

Los caracteres de la representación irreducible j (*caracteres simples*),

$$\chi^{(j)}(\theta) = \mathrm{tr}\left\{D^{(j)}(U(\theta\,\hat{n}))\right\}, \qquad (5.6.29)$$

son una propiedad de cada clase de elementos conjugados en el grupo, de modo que pueden ser calculados tomando $\hat{n}$ en la dirección más conveniente. Por ejemplo,

$$\chi^{(j)}(\theta) = \mathrm{tr}\left\{e^{i\theta J_3}\right\} = \textstyle\sum_{m=-j}^{j} e^{im\theta} = e^{-ij\theta} \sum_{m=0}^{2j} e^{im\theta}$$

$$= e^{-ij\theta}\left(\frac{1 - e^{i(2j+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right) = \frac{\sin[(j+1/2)\theta]}{\sin[\theta/2]}. \qquad (5.6.30)$$

Recurriendo a la medida de integración invariante antes calculada se puede verificar la **ortogonalidad de los vectores de caracteres**,

$$\frac{1}{V[SU(2)]}\int d\mu_{SU(2)}\, \left(\chi^{(j')}(\theta)\right)^{*} \chi^{(j)}(\theta) =$$

$$\frac{1}{16\pi^2}\int_0^{2\pi} 4\sin^2[\theta/2]\, d\theta\, d\Omega_2\, \frac{\sin[(j'+1/2)\theta]\sin[(j+1/2)\theta]}{\sin^2[\theta/2]} = \qquad (5.6.31)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{1}{2}\left\{\cos[(j'-j)\theta] - \cos[(j'+j+1)\theta]\right\} = \delta_{j',j}.$$

5.7. Producto directo de representaciones. Descomposición de Clebsh - Gordan

Tomando el producto directo de dos representaciones unitarias irreducibles de $SU(2)$, $D^{(j_1)}$ y $D^{(j_2)}$, se obtiene una nueva representación, que puede a su vez descomponerse como suma directa de representaciones irreducibles,

$$D^{(j_1 \otimes j_2)} := D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \bigoplus_j a_j \, D^{(j)}, \tag{5.7.1}$$

donde $a_j \in \mathbb{Z}_+$.

Por otra parte, los caracteres de la representación producto directo, $\chi^{(j_1 \otimes j_2)}(\theta)$, son el producto de los caracteres simples $\chi^{(j_1)}(\theta)$ y $\chi^{(j_2)}(\theta)$,

$$\begin{array}{c} \chi^{(j_1 \otimes j_2)}(\theta) = \chi^{(j_1)}(\theta)\chi^{(j_2)}(\theta) = \displaystyle\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} e^{im_1\theta} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} e^{im_2\theta} = \\ = \displaystyle\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^{j} e^{im\theta} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \chi^{(j)}(\theta). \end{array} \tag{5.7.2}$$

Es decir, $a_j = 1$ para $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$, y $a_j = 0$ en todo otro caso[21].

El espacio de la representación $D^{(j_1 \otimes j_2)}$ está generado por los vectores

$$|j_1 \; j_2 \; m_1 \; m_2\rangle := |j_1 \; m_1\rangle \otimes |j_2 \; m_2\rangle \,, \tag{5.7.4}$$

pero los subespacios invariantes correspondientes a las representaciones irreducibles que contiene están generados por las combinaciones

$$|j_1 \; j_2; \; j \; m\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1 \; j_2 \; m_1 \; m_2\rangle \, \langle j_1 \; j_2 \; m_1 \; m_2 | j_1 \; j_2; \; j \; m\rangle \,, \tag{5.7.5}$$

donde los coeficientes de la transformación, $\langle j_1 \; j_2 \; m_1 \; m_2 | j_1 \; j_2; \; j \; m\rangle$, son llamados **coeficientes de Clebsh - Gordan** (cuando los distintos vectores están todos normalizados a 1 y de modo tal que los coeficientes sean reales).

[21] Este resultado puede obtenerse reordenando las sumas en (5.7.2), o bien empleando la ortogonalidad de caracteres, ecuación (5.6.31),

$$\begin{array}{c} \dfrac{1}{V[SU(2)]} \displaystyle\int d\mu_{SU(2)} \left(\chi^{(j)}(\theta)\right)^* \chi^{(j_1 \otimes j_2)}(\theta) = \\ = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \, \dfrac{\sin[(j+1/2)\theta] \sin[(j_1+1/2)\theta] \sin[(j_2+1/2)\theta]}{\sin[\theta/2]} = \\ = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ para } |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \,, \\ 0, \text{ para } j < |j_1 - j_2| \text{ o } j > j_1 + j_2 \,. \end{array} \right. \end{array} \tag{5.7.3}$$

Referidas a esa base, las matrices de la representación $D^{(j_1 \otimes j_2)}$ son llevadas a la forma diagonal en bloques

$$D^{(j_1 \otimes j_2)} \rightharpoondown \begin{pmatrix} D^{(j_1+j_2)} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & D^{(j_1+j_2-1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D^{(|j_1-j_2|)} \end{pmatrix}. \tag{5.7.6}$$

Nótese que

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1). \tag{5.7.7}$$

Si consideramos elementos cerca de la identidad del grupo,

$$\begin{aligned} D^{(j_1 \otimes j_2)} &= \mathbf{1}^{(j_1 \otimes j_2)} + i\alpha^k J_k^{(j_1 \otimes j_2)} + \mathcal{O}(\alpha)^2 = \\ &= \left\{ \mathbf{1}^{(j_1)} + i\alpha^k J_k^{(j_1)} + \mathcal{O}(\alpha)^2 \right\} \otimes \left\{ \mathbf{1}^{(j_2)} + i\alpha^k J_k^{(j_2)} + \mathcal{O}(\alpha)^2 \right\} = \\ &= \mathbf{1}^{(j_1)} \otimes \mathbf{1}^{(j_2)} + i\alpha^k \left\{ J_k^{(j_1)} \otimes \mathbf{1}^{(j_2)} + \mathbf{1}^{(j_1)} \otimes J_k^{(j_2)} \right\} + \mathcal{O}(\alpha)^2. \end{aligned} \tag{5.7.8}$$

Pero también

$$\begin{aligned} D^{(j_1 \otimes j_2)} &= \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \left\{ \mathbf{1}^{(j)} + i\alpha^k J_k^{(j)} + \mathcal{O}(\alpha)^2 \right\} = \\ &= \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathbf{1}^{(j)} + i\alpha^k \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} J_k^{(j)} + \mathcal{O}(\alpha)^2, \end{aligned} \tag{5.7.9}$$

de donde resulta que

$$\begin{aligned} J_k^{(j_1 \otimes j_2)} &= J_k^{(j_1)} \otimes \mathbf{1}^{(j_2)} + \mathbf{1}^{(j_1)} \otimes J_k^{(j_2)} = \\ &= \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} J_k^{(j)}, \end{aligned} \tag{5.7.10}$$

para $k = 1, 2, 3$.

Entonces, aplicado a los vectores de la base (5.7.5),

$$
\begin{aligned}
& J_k^{(j_1\otimes j_2)}\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \\
&= \left\{\bigoplus_{j'=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} J_k^{(j')}\right\}|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = J_k^{(j)}\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \\
&= \left\{J_k^{(j_1)}\otimes \mathbf{1}^{(j_2)} + \mathbf{1}^{(j_1)}\otimes J_k^{(j_2)}\right\}|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \\
&= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle \\
&\times\left\{J_k^{(j_1)}\,|j_1\ m_1\rangle\otimes|j_2\ m_2\rangle + |j_1\ m_1\rangle\otimes J_k^{(j_2)}\,|j_2\ m_2\rangle\right\}.
\end{aligned}
\tag{5.7.11}
$$

En particular,

$$
\begin{aligned}
& J_3^{(j_1\otimes j_2)}\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \\
&= J_3^{(j)}\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = m\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \\
&= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle \\
&\times\left\{J_3^{(j_1)}\,|j_1\ m_1\rangle\otimes|j_2\ m_2\rangle + |j_1\ m_1\rangle\otimes J_3^{(j_2)}\,|j_2\ m_2\rangle\right\} = \\
&= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}(m_1+m_2)\,|j_1\ j_2\ m_1\ m_2\rangle\,\langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{5.7.12}
$$

y

$$
\begin{aligned}
& J_-^{(j_1\otimes j_2)}\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = \\
&= J_-^{(j)}\,|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle = [(j+m)(j-m+1)]^{1/2}\,|j_1\ j_2;\ j\ (m-1)\rangle = \\
&= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2|j_1\ j_2;\ j\ m\rangle \\
&\times\left\{J_-^{(j_1)}\,|j_1\ m_1\rangle\otimes|j_2\ m_2\rangle + |j_1\ m_1\rangle\otimes J_-^{(j_2)}\,|j_2\ m_2\rangle\right\} =
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1\ j_2\ m_1\ m_2 | j_1\ j_2;\ j\ m\rangle$$

$$\times \left\{ [(j_1+m_1)(j_1-m_1+1)]^{1/2} \left| j_1\ (m_1-1)\right\rangle \otimes \left| j_2\ m_2 \right\rangle \right. \tag{5.7.13}$$

$$\left. + [(j_2+m_2)(j_2-m_2+1)]^{1/2} \left| j_1\ m_1\right\rangle \otimes \left| j_2\ (m_2-1) \right\rangle \right\}.$$

Consideremos el caso $j_1 = 1/2 = j_2$. De lo anterior sabemos que el producto directo de esas dos representaciones se descompone en la suma directa de las representaciones con $j = 0, 1$, y que los generadores pueden expresarse como

$$J_k^{(1/2\otimes 1/2)} = J_k^{(1/2)} \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_2 \otimes J_k^{(1/2)} = J_k^{(1)} \oplus J_k^{(0)}. \tag{5.7.14}$$

Notemos que

$$J_3^{(1/2\otimes 1/2)} \left|1/2\ 1/2\right\rangle \otimes \left|1/2\ 1/2\right\rangle = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) \left|1/2\ 1/2\right\rangle \otimes \left|1/2\ 1/2\right\rangle, \tag{5.7.15}$$

y que ése es el único vector del espacio de la representación $(1/2\otimes 1/2)$ con autovalor $m = 1$, por lo que necesariamente

$$\left|1/2\ 1/2;\ 1\ 1\right\rangle = \left|1/2\ 1/2\right\rangle \otimes \left|1/2\ 1/2\right\rangle. \tag{5.7.16}$$

Por aplicación de $J_-^{(1/2\otimes 1/2)}$ sobre ese vector se puede generar el resto de la base correspondiente a la representación irreducible $j = 1$:

$$J_-^{(1/2\otimes 1/2)} \left|1/2\ 1/2;\ 1\ 1\right\rangle = [(1+1)(1-1+1)]^{1/2} \left|1/2\ 1/2;\ 1\ 0\right\rangle =$$

$$[(1/2+1/2)(1/2-1/2+1)]^{1/2} \left|1/2\ (1/2-1)\right\rangle \otimes \left|1/2\ 1/2\right\rangle \tag{5.7.17}$$

$$+ [(1/2+1/2)(1/2-1/2+1)]^{1/2} \left|1/2\ 1/2\right\rangle \otimes \left|1/2\ (1/2-1)\right\rangle,$$

es decir

$$\left|1/2\ 1/2;\ 1\ 0\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left|1/2\ \ -1/2)\right\rangle \otimes \left|1/2\ 1/2\right\rangle + \left|1/2\ 1/2\right\rangle \otimes \left|1/2\ \ -1/2\right\rangle \right\}. \tag{5.7.18}$$

Similarmente,

$$J_-^{(1/2\otimes 1/2)} \left|1/2\ 1/2;\ 1\ 0\right\rangle = [(1+0)(1-0+1)]^{1/2} \left|1/2\ 1/2;\ 1\ \ -1\right\rangle =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} [(1/2+1/2)(1/2-1/2+1)]^{1/2} \left|1/2\ \ -1/2\right\rangle \otimes \left|1/2\ \ -1/2\right\rangle, \tag{5.7.19}$$

es decir,

$$\left|1/2\ 1/2;\ 1\ \ -1\right\rangle = \left|1/2\ \ -1/2\right\rangle \otimes \left|1/2\ \ -1/2\right\rangle. \tag{5.7.20}$$

Ahora bien, el vector que genera el espacio (unidimensional) de la representación irreducible $j = 0$ debe ser ortogonal a los anteriores, y corresponder al autovalor $m = 0$ de $J_3^{(1/2\otimes 1/2)}$, por lo que (una vez normalizado) necesariamente es

$$\begin{array}{c} |1/2\ 1/2;\ 0\ 0\rangle = \\ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |1/2\ \ -1/2\rangle\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle - |1/2\ 1/2\rangle \otimes |1/2\ \ -1/2\rangle \right\}. \end{array} \tag{5.7.21}$$

De las igualdades (5.7.16), (5.7.18), (5.7.20) y (5.7.21) resulta inmediato determinar los coeficientes de Clebsh - Gordan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle 1/2\ 1/2\ 1/2\ 1/2 | 1/2\ 1/2;\ 1\ 1\rangle = 1, \\ \\ \langle 1/2\ 1/2\ (\pm 1/2)\ (\mp 1/2) | 1/2\ 1/2;\ 1\ 0\rangle = 1/\sqrt{2}, \\ \\ \langle 1/2\ 1/2\ (-1/2)\ (-1/2) | 1/2\ 1/2;\ 1\ (-1)\rangle = 1, \\ \\ \langle 1/2\ 1/2\ (\mp 1/2)\ (\pm 1/2) | 1/2\ 1/2;\ 0\ 0\rangle = \pm 1/\sqrt{2}, \end{array} \right. \tag{5.7.22}$$

con los demás coeficientes nulos.

El producto directo de las representaciones $j_1 = 1$ y $j_2 = 1/2$ se descompone en la suma directa de las representaciones irreducibles $j = 3/2, 1/2$. Sus generadores pueden expresarse como

$$J_k^{(1\otimes 1/2)} = J_k^{(1)} \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_3 \otimes J_k^{(1/2)} = J_k^{(3/2)} \oplus J_k^{(1/2)}. \tag{5.7.23}$$

El (único) vector correspondiente al máximo autovalor posible de $J_3^{(1\otimes 1/2)}$, $m = 3/2$, es

$$|1\ 1/2;\ 3/2\ 3/2\rangle = |1\ 1\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle\,, \tag{5.7.24}$$

y a partir de él, aplicacndo reiteradamente el operador $J_-^{(1\otimes 1/2)}$, se obtienen los demás vectores de la base del espacio de la representación $j = 3/2$:

$$
\begin{gathered}
|1\ 1/2;\ 3/2\ 1/2\rangle = \\
= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{2}\, |1\ 0\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle + |1\ 1\rangle \otimes |1/2\ \ -1/2\rangle \right\}, \\
|1\ 1/2;\ 3/2\ \ -1/2\rangle = \\
= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{2}\, |1\ 0\rangle \otimes |1/2\ \ -1/2\rangle + |1\ \ -1\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle \right\}, \\
|1\ 1/2;\ 3/2\ \ -3/2\rangle = |1\ \ -1\rangle \otimes |1/2\ \ -1/2\rangle\,.
\end{gathered}
\tag{5.7.25}
$$

Ahora bien, existen en el espacio producto directo dos vectores linealmente independientes que corresponden al mismo autovalor $m = 1/2$ de $J_3^{(1\otimes 1/2)}$. Una combinación lineal particular de ellos da el vector $|1\ 1/2;\ 3/2\ 1/2\rangle$ de (5.7.25), mientras que una combinación ortogonal a ella debe ser proporcional al vector de máximo m $(= 1/2)$ de la representación $j = 1/2$,

$$
\begin{gathered}
|1\ 1/2;\ 1/2\ 1/2\rangle = \\
= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ |1\ 0\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle - \sqrt{2}\, |1\ 1\rangle \otimes |1/2\ \ -1/2\rangle \right\}.
\end{gathered}
\tag{5.7.26}
$$

Por aplicación de $J_-^{(1\otimes 1/2)}$ se completa la base,

$$
\begin{gathered}
|1\ 1/2;\ 1/2\ \ -1/2\rangle = \\
= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ |1\ 0\rangle \otimes |1/2\ \ -1/2\rangle - \sqrt{2}\, |1\ \ -1\rangle \otimes |1/2\ 1/2\rangle \right\},
\end{gathered}
\tag{5.7.27}
$$

y de (5.7.24), (5.7.25), (5.7.26) y (5.7.27) se determinan los coeficientes de Clebsh - Gordan para este producto directo de representaciones.

5.8. Clasificación de las álgebras de Lie simples

Un subespacio $\mathcal{F}$ del álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie G, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, constituye una **subálgebra de Lie** si $[Y_1, Y_2] \in \mathcal{F}$ para todo $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$. Esta subálgebra corresponde a un subgrupo de Lie $H \subset G$.

Ese subgrupo H es *invariante* si se cumple además que $[X, Y] \in \mathcal{F}$ para todo $X \in \mathcal{G}$ y para todo $Y \in \mathcal{F}$. En ese caso se dice que el subespacio $\mathcal{F}$ es un **ideal**.

Un álgebra de Lie $\mathcal{G}$ se dice **simple** si tiene dimensión $\dim \mathcal{G} \geq 2$ y no contiene ideales propios (distintos de $\mathcal{G}$ y de $\{0\}$)[22].

Un álgebra de Lie $\mathcal{G}$ se dice **semi-simple** si es la suma directa de álgebras de Lie simples[23].

Élie Cartan[24] ha dado una clasificación completa de las álgebras de Lie simples empleando las propiedades de su representación adjunta, que siempre es *irreducible.*

El **rango** $r < n$ de un álgebra de Lie semi-simple de dimensión n es el máximo número de vectores linealmente independientes de ese espacio que pueden ser seleccionados de modo que conmuten entre sí.

Un conjunto de r de tales vectores genera una *subálgebra abeliana* del álgebra de Lie, llamada **subálgebra de Cartan**,

$$[H_i, H_j] = 0\,, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \ldots, r\,. \tag{5.8.1}$$

En esas condiciones, Cartan ha demostrado que siempre es posible seleccionar un conjunto de $n-r$ combinaciones lineales (en general complejas[25]) de generadores linealmente independientes entre sí y de los anteriores, $E_{\bar{\alpha}}$, de modo que ellas resulten ser *vectores propios simultáneos* de las operaciones de conmutación con los H_i,

$$[H_i, E_{\bar{\alpha}}] = \alpha_i\, E_{\bar{\alpha}}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r\,, \tag{5.8.2}$$

correspondientes a autovalores α_i *no todos nulos.* Además, siempre es posible elegir los generadores H_i de manera tal que esos autovalores sean reales.

De ese modo, el conjunto de los r autovalores α_i correspondientes al generador $E_{\bar{\alpha}}$ forman un vector no nulo de un espacio real r-dimensional, $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^r$, llamado **raíz** correspondiente a $E_{\bar{\alpha}}$. Similarmente, de (5.8.1) podemos decir que los generadores H_i corresponden a *raíces nulas.*

También se demuestra que las raíces son *no degeneradas*, a excepción de la raíz nula, y que si $\bar{\alpha}$ es una raíz entonces $-\bar{\alpha}$ también lo es. Más generalmente, para dos raíces $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ cualesquiera resulta que $2\left(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}\right) / \left(\bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha}\right) = n \in \mathbb{Z}$ y que $\left(\bar{\beta} - n\,\bar{\alpha}\right)$ es también raíz. En esas expresiones, el *producto escalar* entre raíces está definido

[22]Un álgebra de Lie simple corresponde a un **grupo de Lie simple**, es decir, un grupo que no contiene subgrupos de Lie propios invariantes.

[23]Un álgebra de Lie semi-simple corresponde a un grupo de Lie que es producto directo de grupos de Lie simples. En particular, un grupo de Lie semi-simple no contiene subgrupos de Lie invariantes abelianos.

[24]Élie Cartan (1869 - 1951)

[25]Esto corresponde a tomar elementos de la *complexificación* del álgebra de Lie, pero manteniendo el número de generadores linealmente independientes igual a la dimensión del álgebra original.

en términos de la forma de Killing[26] restringida a la subálgebra de Cartan como $\left(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}\right):=\alpha^i\beta_i$, donde $\alpha^i g_{ij}=\alpha_j$.

En particular, si $\left(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}\right)>0\Rightarrow 2\left(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}\right)=n\left(\bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha}\right)=m\left(\bar{\beta}\cdot\bar{\beta}\right)$, con $n,m\in\mathbb{N}$, lo que restringe los ángulos entre raíces a sólo unas pocas posibilidades y condiciona la relación entre sus *longitudes*. En efecto,

$$\begin{gathered}\cos^2\left(\theta_{\alpha\beta}\right)=\frac{\left(\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}\right)^2}{\left(\bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha}\right)\left(\bar{\beta}\cdot\bar{\beta}\right)}=\frac{n\,m}{4}\leq 1\,,\\ \frac{\left(\bar{\beta}\cdot\bar{\beta}\right)}{\left(\bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha}\right)}=\frac{n}{m}\,.\end{gathered}\tag{5.8.3}$$

Por otra parte, de la identidad de Jacobi resulta que

$$\begin{gathered}\left[H_i,\left[E_{\bar{\alpha}},E_{\bar{\beta}}\right]\right]=\left[E_{\bar{\alpha}},\left[H_i,E_{\bar{\beta}}\right]\right]+\left[\left[H_i,E_{\bar{\alpha}}\right],E_{\bar{\beta}}\right]=\\ =\left(\alpha_i+\beta_i\right)\left[E_{\bar{\alpha}},E_{\bar{\beta}}\right]\,,\end{gathered}\tag{5.8.4}$$

de modo que pueden presentarse dos situaciones:

- Si $\left(\bar{\alpha}+\bar{\beta}\right)$ es una raíz, entonces $\left[E_{\bar{\alpha}},E_{\bar{\beta}}\right]\sim E_{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}$. En particular, para $\bar{\beta}=-\bar{\alpha}$ el conmutador $\left[E_{\bar{\alpha}},E_{-\bar{\alpha}}\right]$ está contenido en la subálgebra de Cartan.
- Si $\left(\bar{\alpha}+\bar{\beta}\right)$ no es una raíz, entonces $\left[E_{\bar{\alpha}},E_{\bar{\beta}}\right]=\mathbf{0}$.

Para esta elección de generadores, las constantes de estructura satisfacen las relaciones

$$\begin{gathered}{C_{ij}}^k={C_{ij}}^{\bar{\alpha}}={C_{i\bar{\alpha}}}^j=0\,,\\ {C_{i\bar{\alpha}}}^{\bar{\beta}}=i\,\alpha_i\,\delta_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}\,,\\ \left(\bar{\alpha}+\bar{\beta}\right){C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}^i=0\,,\\ \left(\bar{\gamma}-\bar{\alpha}-\bar{\beta}\right){C_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}^{\bar{\gamma}}=0\,.\end{gathered}\tag{5.8.5}$$

Se puede mostrar que las únicas componentes no nulas de la forma de Killing son $g_{(-\bar{\alpha})\bar{\alpha}}=g_{\bar{\alpha}(-\bar{\alpha})}$ y

$$g_{ij}=\sum_{\bar{\alpha}}\alpha_i\alpha_j\;\Rightarrow\;\left(g_{ij}\right)=\sum_{\bar{\alpha}}\bar{\alpha}\otimes\bar{\alpha}\,.\tag{5.8.6}$$

Normalizando adecuadamente los generadores podemos además fijar $g_{\bar{\alpha}(-\bar{\alpha})}=1$.

[26]Con nuestra definición, esta forma es simétrica y positiva definida para toda álgebra simple *compacta*, es decir, correspondiente a un grupo simple compacto. En particular, una adecuada elección de los generadores de la subálgebra de Cartan permite llevarla a la forma $g_{ij}\sim\delta_{ij}$ (Ver Nota al pié en página 98).

Como el álgebra de Lie considerada es semi-simple, $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0 \Rightarrow \det(g_{ij}) \neq 0$, de donde resulta que las raíces $\bar{\alpha}$ generan el espacio euclídeo $\mathbb{R}^r$.

En esas condiciones, el álgebra de Lie semi-simple queda descrita por los conmutadores de los generadores de la **base estándar de Cartan**,

$$\begin{cases} [H_i, H_j] = 0\,, \quad i,j = 1,2,\ldots,r\,, \\ \\ [H_i, E_{\bar{\alpha}}] = \alpha_i\, E_{\bar{\alpha}}\,, \quad i = 1,2,\ldots,r\,, \forall\,\bar{\alpha}\,, \\ \\ [E_{\bar{\alpha}}, E_{-\bar{\alpha}}] = \alpha^i\, H_i\,, \quad \forall\,\bar{\alpha}\,, \\ \\ \left[E_{\bar{\alpha}}, E_{\bar{\beta}}\right] = N_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\, \delta^{\,\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}\, E_{\bar{\gamma}}\,, \end{cases} \tag{5.8.7}$$

donde $\alpha^i = g^{ij}\alpha_j$ (con $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$) y $N_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ es cierta constante.

Se dice que la raíz $\bar{\alpha}$ es **positiva** si la primera componente no nula de ese vector es positiva. Eso introduce un *ordenamiento* entre raíces de modo que $\bar{\alpha} > \bar{\beta}$ si el vector $(\bar{\alpha} - \bar{\beta})$ es *positivo.*

Una raíz positiva se dice **simple** si ella no puede expresarse como suma de dos raíces positivas. Un álgebra de rango r tiene r raíces simples *linealmente independientes.*

Es posible demostrar que las raíces $\bar{\alpha}$ de un *álgebra de Lie simple* pueden ser obtenidas a partir del conjunto de r raíces simples por aplicación de un grupo de orden finito de transformaciones discretas en $\mathbb{R}^r$ llamado **grupo de Weyl**[27] del álgebra, que condensa las propiedades antes descritas.

Por su parte, esas raíces simples satisfacen un conjunto de restricciones que hacen que sólo puedan tener hasta dos longitudes distintas y formar entre sí ciertos ángulos particulares: $\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi$ ó $\frac{5}{6}\pi$. De acuerdo a esas características es posible clasificar las álgebras simples en cuatro series infinitas llamadas A_r, B_r, C_r y D_r, unívocamente relacionadas, respectivamente, con los grupos de Lie simples *compactos*[28] $SU(r+1)$ con $r \geq 1$, $SO(2r+1)$ con $r \geq 2$, $Sp(r)$ con $r \geq 3$ y $SO(2r)$ con $r \geq 4$, además de cinco **álgebras excepcionales** no incluidas en las anteriores series, llamadas F_4, G_2, E_6, E_7, E_8. En todos los casos, el subíndice indica el rango del álgebra.

---

[27]Hermann Weyl (1885 - 1955).

[28]Algebras de grupos de Lie simples no compactos del mismo rango y dimensión están contenidas como subespacios cerrados (respecto de la operación del álgebra) en la *complexificación* de esas álgebras simples *compactas* (que tienen forma de Killing positiva definida).

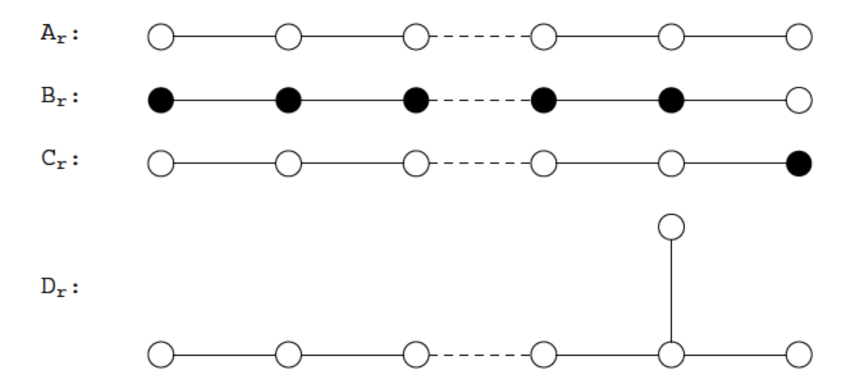


FIGURA 1. Diagramas de Dynkin de las cuatro series de álgebras simples.

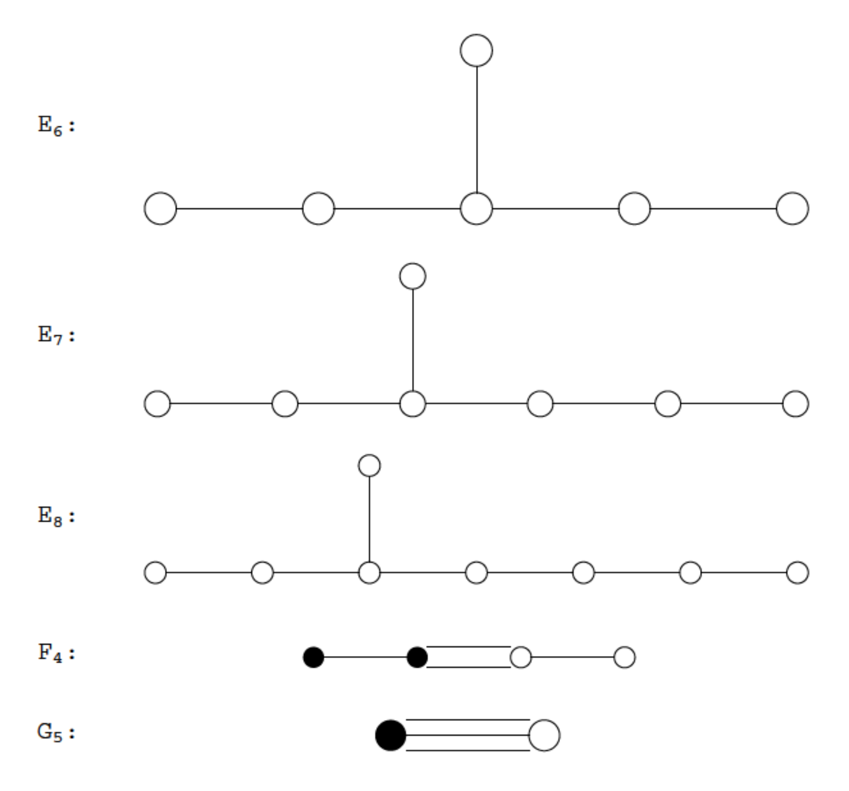


FIGURA 2. Diagramas de Dynkin de las cinco álgebras excepcionales.

Esas álgebras simples pueden ser puestas en correspondencia biunívoca con los llamados **diagramas de Dynkin**[29], diagramas conexos en los cuales las raíces simples son representadas por *vértices* (pequeños círculos llenos o vacíos según corresponda a las de longitud mayor o menor) unidos por 0,1,2 ó 3 líneas según sea que entre ellas formen un ángulo de $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$ ó $\frac{5}{6}\pi$ respectivamente. Para más detalles, ver la bibliografía sugerida.

[29]Eugene Dynkin (1924 -).

5.9. Representaciones irreducibles de las álgebras de Lie simples

Como toda representación matricial de un grupo de Lie compacto es equivalente a una representación unitaria, las matrices que representan a los generadores de las álgebras simples *compactas* (descritas por la clasificación de Cartan) en una representación irreducible siempre pueden ser elegidas como autoadjuntas.

Dada una representación matricial de un álgebra simple compacta, pueden obtenerse las representaciones de otras álgebras simples (no compactas) del mismo rango y dimensión a partir de los correspondientes generadores en la complexificación de esa respresentación. De ese modo, el conocimiento de las representaciones irreducibles de las álgebras de Lie simples compactas implica el conocimiento de las representaciones irreducibles de todas las álgebras simples.

Si denotamos a los generadores en una representación irreducible de un álgebra simple compacta por

$$D\,(H_i) = X_i\,, \quad D\,(E_{\bar\alpha}) = Y_{\bar\alpha}\,, \tag{5.9.1}$$

matrices que satisfacen

$$[X_i, X_j] = 0\,, i, j = 1, \cdots, r\,, \quad [X_i, Y_{\bar\alpha}] = \alpha_i Y_{\bar\alpha}\,, \quad \text{etc}, \tag{5.9.2}$$

siempre será posible elegir los generadores de la subálgebra de Cartan como matrices autoadjuntas, $X_i{}^\dagger = X_i$, las que podrán ser diagonalizadas simultáneamente. Por lo tanto, existirán vectores en el espacio de la representación que sean autovectores simultáneos de todos ellos,

$$X_i\,|\bar m\rangle = m_i\,|\bar m\rangle\ , \quad \bar m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r\,, \tag{5.9.3}$$

donde $\bar m$ es llamado **peso** del vector $|\bar m\rangle$. Es posible mostrar de que las raíces $\bar\alpha$ son (proporcionales a) los pesos de la representación adjunta.

Por otra parte, dado un autovector $|\bar m\rangle$, por aplicación de los $Y_{\bar\alpha}$ obtenemos nuevos autovectores con peso aumentado en $\bar\alpha$,

$$X_i\,(Y_{\bar\alpha}\,|\bar m\rangle) = ([X_i, Y_{\bar\alpha}] + Y_{\bar\alpha} X_i)\,|\bar m\rangle = (m_i + \alpha_i)\,(Y_{\bar\alpha}\,|\bar m\rangle)\ , \tag{5.9.4}$$

de modo que por aplicación de todos los productos de los $Y_{\bar\alpha}$ podemos generar una base del espacio de la representación irreducible formada por autovectores simultáneos de los X_i.

Se demuestra que si $\bar m$ es un peso, entonces $2\,(\bar m \cdot \bar\alpha)\,/\,(\bar\alpha \cdot \bar\alpha) = n \in \mathbb{Z}$ y $\bar m - n\bar\alpha$ es también un peso, de modo que el conjunto de pesos tiene como grupo de simetrías

al mismo grupo de Weyl que las raíces. Pero, a diferencia de éstas, los pesos pueden ser degenerados.

También es posible ordenar a los pesos de la misma manera que a las raíces, definiendo que $\bar{m} > \bar{m}'$ si la primera componente no nula de $\bar{m} - \bar{m}'$ es positiva.

Como estamos considerando representaciones de dimensión finita, debe existir un peso máximo, $\bar{M}$. Se demuestra que el peso máximo de una representación irreducible es no degenerado y que representaciones equivalentes tienen el mismo peso máximo. Además, si α es una raíz *simple*, entonces $l_{\bar{\alpha}} = 2\,(\bar{m}\cdot\bar{\alpha})\,/\,(\bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha}) \in \mathbb{Z}_+$.

Como las raíces simples (ordenadas, por ejemplo, de modo *creciente*) constituyen una base (no ortogonal) de $\mathbb{R}^r$, el conjunto de los r enteros no negativos $l_{\bar{\alpha}_i}$ determina completamente al peso máximo $\bar{M}$ y, por lo tanto, caracteriza completamente a la representación irreducible. En consecuencia, cada clase de representaciones irreducibles está unívocamente identificada por un conjunto de r números enteros no negativos $(l_{\bar{\alpha}_1}, l_{\bar{\alpha}_2}, \cdots, l_{\bar{\alpha}_r})$.

Las **representaciones fundamentales** son aquellas para las cuales todos esos números son nulos excepto uno igual a la unidad, $l_{\bar{\alpha}} = 1$. Por lo tanto, un álgebra simple de rango r tiene r representaciones fundamentales.

Los pesos máximos de las representaciones fundamentales, $\bar{m}_{\bar{\alpha}}$, son llamados **pesos fundamentales**. Para ellos se tiene que $2\left(\bar{m}_{\bar{\beta}}\cdot\bar{\alpha}\right)/\left(\bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha}\right) = \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$, de modo que raíces simples y pesos fundamentales constituyen bases duales de $\mathbb{R}^r$ (a menos de la normalización) respecto de la métrica inducida por la forma de Killing.

En esas condiciones, el peso máximo de la representación irreducible $D^{\left(l_{\bar{\alpha}_1},\cdots,l_{\bar{\alpha}_r}\right)}$ está dado por

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{r} l_{\bar{\alpha}_i}\,\bar{m}_{\bar{\alpha}_i}\,. \tag{5.9.5}$$

Este peso corresponde, como hemos dicho, a un *único* vector $\left|\bar{M}\right\rangle$ a partir del cual es posible construir toda la base del espacio de la representación por aplicación sucesiva de los Y_α. Una vez determinada, resulta inmediato establecer la forma de los generadores X_i e $Y_{\bar{\alpha}}$ en esa representación.

Las r matrices autoadjntas X_i y $n-r$ combinaciones autoadjuntas linealmente independientes de las $Y_{\bar{\alpha}}$ generan la representación irreducible del álgebra de Lie compacta. Por exponenciación, las combinaciones lineales con *coeficientes reales* de esas matrices permiten construir las matrices de la representación unitaria irreducible del grupo compacto, mientras que las representaciones matriciales (no unitarias) de los grupos no compactos asociados a esa misma álgebra simple se obtienen por extensión analítica en esos parámetros. Para más detalles, ver la bibliografía sugerida.

Bibliografía:

- H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symmétries des Particules Elémentaires.* Gordon and Breach, New York, 1967.
- R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications.* John Wiley & Sons, New York, 1974.
- Brian C. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*, Springer, 2003.
- J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Academic Press, 1984.
- Pierre Ramond, *Group Theory, A Physicists Survey*, Cambridge University Press, 2010.

Capítulo 6

EL GRUPO DE LORENTZ

6.1. El grupo de Lorentz

El espacio de Minkowski, $\mathbf{M}_4$, es un espacio real pseudo - euclídeo de signatura $(1,3)$. Las coordenadas que distintos **observadores inerciales** asignan a un mismo punto de $\mathbf{M}_4$ están relacionadas por transformaciones lineales que preservan el **intervalo**

$$s^2 = (x^0)^2 - x^i x^i = (\bar{x}^0)^2 - \bar{x}^i \bar{x}^i. \tag{6.1.1}$$

En términos de la **métrica** del espacio, $g = \text{diag}(+1,-1,-1,-1)$, el intervalo se escribe

$$\begin{aligned} s^2 = x^t g x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \\ \bar{x}^t g \bar{x} = g_{\mu\nu} \bar{x}^\mu \bar{x}^\nu. \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

La relación entre las coordenadas está dada por la transformación lineal

$$\bar{x} = Lx, \tag{6.1.3}$$

o bien, en componentes,

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{6.1.4}$$

donde los elementos de matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ son reales. La invarianza del intervalo implica que las matrices L preservan la métrica g,

$$L^t g L = g \Longrightarrow g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}. \tag{6.1.5}$$

Esto significa que el grupo de Lorentz[1] es lo que antes hemos llamado grupo pseudo-ortogonal $O(1,3)$.

La relación (6.1.5) implica que el determinante de las matrices L sólo puede tomar los valores

$$\det L = \pm 1. \tag{6.1.6}$$

Dado que todo grupo de matrices es un grupo de Lie, sus elementos son funciones continuas de los parámetros del grupo. En consecuencia, un cambio de signo del determinante en (6.1.6) no puede ser producto de la variación de un parámetro

[1]Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928).

continuo. De ello resulta que *la variedad del grupo de Lorentz es no conexa.* Si $\det L = +1$ (-1) la transformación L se dice **propia** (**impropia**).

Además, de (6.1.5) surge que

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} = g_{00} \Longrightarrow (\Lambda^{0}{}_{0})^{2} - \Lambda^{i}{}_{0}\Lambda^{i}{}_{0} = 1. \tag{6.1.7}$$

En consecuencia, $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$, y las transformaciones son llamadas **ortócronas** si $\Lambda^0{}_0 \geq 1$, o bien **no ortócronas** para $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. Tampoco aquí es posible pasar de unas a otras mediante la variación de un parámetro continuo.

Por lo tanto, el grupo de Lorentz está constituido por cuatro componentes desconectadas entre sí, caracterizadas por los signos de $\det L$ y de $\Lambda^0{}_0$. De ellas, sólo la parte conexa que contiene a la identidad forma un subgrupo (invariante[2]), llamado **subgrupo propio ortócrono** y denotado por $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$. Téngase en cuenta que $\det \mathbf{1}_4 = 1$ y $\mathbf{1}^0{}_0 = 1$.

Las otras componentes corresponden a los *cosets* que se obtienen de $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$. La transformación de **paridad**,

$$P = \mathrm{diag}(1, -1, -1 - 1), \tag{6.1.8}$$

que cambia el signo de las coordenadas espaciales y satisface

$$\det P = -1,\; P^0_0 = 1,\; P^2 = \mathbf{1}_4, \tag{6.1.9}$$

es una transformación *impropia ortócrona* con la que se construye el coset $\mathcal{L}_{-}^{\uparrow} = P\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$.

La **inversión temporal**,

$$T = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1), \tag{6.1.10}$$

que satisface

$$\det T = -1,\; T^0_0 = -1,\; T^2 = \mathbf{1}_4, \tag{6.1.11}$$

es una transformación *impropia no ortócrona* con la que se construye el coset $\mathcal{L}_{-}^{\downarrow} = T\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$.

Finalmente, el producto $PT = TP = -\mathbf{1}_4$ es una transformación *propia no ortócrona*, con la que se obtiene el coset $\mathcal{L}_{+}^{\downarrow} = PT\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$.

[2] En efecto, si $L_0 \in \mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$, existe una curva sobre el grupo que la conecta de manera continua con la identidad $\mathbf{1}_4$. Entonces, $\forall L \in \mathcal{L}$, LL_0L^{-1} se conecta con continuidad con $L\mathbf{1}_4L^{-1} = \mathbf{1}_4$ y, en consecuencia, $LL_0L^{-1} \in \mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$.

El subgrupo propio ortócrono contiene transformaciones que corresponden a *rotaciones en el espacio*,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & R \\ 0 & \end{pmatrix}, \text{ con } R \in SO(3). \tag{6.1.12}$$

En efecto, puesto que $R^t R = \mathbf{1}_3$, es evidente que $L^t g L = g$, mientras que

$$\det L = \det R = 1,\ L^0{}_0 = 1. \tag{6.1.13}$$

El subgrupo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ también contiene *boosts* o transformaciones de Lorentz propiamente dichas. Por ejemplo, para

$$\begin{aligned} \bar{x}^0 &= x^0 \cosh\alpha + x^1 \sinh\alpha \\ \bar{x}^1 &= x^0 \sinh\alpha + x^1 \cosh\alpha \\ \bar{x}^2 &= x^2 \\ \bar{x}^3 &= x^3, \end{aligned} \tag{6.1.14}$$

tenemos la matriz

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1.15}$$

para la cual $\det L = \cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$ y $L^0{}_0 = \cosh\alpha \geq 1$, y que también satisface $L^t g L = g$. El parámetro α está relacionado con v, velocidad relativa de los observadores inerciales en la dirección del eje x^1, por

$$\cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \sinh\alpha = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{6.1.16}$$

donde c es la velocidad de la luz. Nótese que esa matriz no es una función periódica del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, lo que corresponde al hecho de que *el grupo de Lorentz es no compacto.*

6.2. Álgebra de Lie del subgrupo propio ortócrono $\mathcal{L}_+^\uparrow$

Las matrices próximas de la identidad tienen la forma

$$L = \mathbf{1}_4 + \varepsilon \implies \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu; \tag{6.2.1}$$

remplazando esta expresión en (6.1.5) se obtiene

$$g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu}\varepsilon^\alpha{}_\mu + g_{\mu\beta}\varepsilon^\beta{}_\nu + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = g_{\mu\nu}, \tag{6.2.2}$$

de donde resulta que el producto $g\,\varepsilon$ es una matriz antisimétrica.

Definiendo $\varepsilon_{\mu\nu} := g_{\mu\alpha}\varepsilon^{\alpha}{}_{\nu}$, y teniendo en cuenta que $g_{\mu\nu}$ es simétrico, de la anterior ecuación tenemos[3]

$$\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu} = 0. \tag{6.2.4}$$

En consecuencia, el álgebra de Lie está generada por $(4^2-4)/2 = 6$ generadores, de modo que $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ *es un grupo de Lie de dimensión 6.*

Para determinar las constantes de estructura sería necesario elegir una base para el espacio de las matrices reales antisimétricas de 4×4, multiplicarlas a izquierda por $g^{-1} = g$ y calcular los conmutadores de los generadores resultantes (ver Ejercicio 44.).

Alternativamente, daremos una realización de esos generadores en términos de operadores diferenciales en las coordenadas del espacio - tiempo. Para ello consideremos la diferencia

$$\begin{gathered}\bar{x}^{\mu} - x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}{}_{\beta}x^{\beta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \varepsilon^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta}(\partial_{\alpha}x^{\mu}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(x_{\beta}\partial_{\alpha} - x_{\alpha}\partial_{\beta})x^{\mu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \tfrac{-i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\hat{L}_{\alpha\beta}x^{\mu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{gathered} \tag{6.2.5}$$

donde los operadores diferenciales

$$\hat{L}_{\alpha\beta} = -i(x_{\alpha}\partial_{\beta} - x_{\beta}\partial_{\alpha}) = -\hat{L}_{\beta\alpha} \tag{6.2.6}$$

son hermíticos y antisimétricos en su par de índices. De ese modo, la transformación que sufre el vector de coordenadas también puede ser descrita por

$$\bar{x} = \left(1 - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\hat{L}_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) x. \tag{6.2.7}$$

Tomando los conmutadores de los generadores así representados se obtienen las constantes de estructura del grupo $SO(1,3)$,

$$\left[\hat{L}_{\mu\nu}, \hat{L}_{\rho\sigma}\right] = -ig_{\nu\rho}\hat{L}_{\mu\sigma} + ig_{\mu\rho}\hat{L}_{\nu\sigma} + ig_{\nu\sigma}\hat{L}_{\mu\rho} - ig_{\mu\sigma}\hat{L}_{\nu\rho}. \tag{6.2.8}$$

En particular, considerando la subálgebra correspondiente a índices espaciales tenemos

$$\left[\hat{L}_{ij}, \hat{L}_{kl}\right] = i\delta_{jk}\hat{L}_{il} - i\delta_{ik}\hat{L}_{jl} - i\delta_{jl}\hat{L}_{ik} + i\delta_{il}\hat{L}_{jk}, \tag{6.2.9}$$

en la que se reconoce el álgebra de Lie de $SO(3)$.

---

[3]Evidentemente, $g(g\,\varepsilon)g = \varepsilon\, g$ es también una matriz antisimétrica. En efecto, si $\varepsilon^{\mu\nu} := \varepsilon^{\mu}{}_{\alpha}g^{\alpha\nu}$, donde $g^{\alpha\mu} := (g^{-1})_{\alpha\mu}$ (con $g^{-1} = g$), resulta que

$$\varepsilon^{\mu\nu} + \varepsilon^{\nu\mu} = 0. \tag{6.2.3}$$

Puede darse a la operación en el álgebra de Lie de $SO(1,3)$ un aspecto más familiar redefiniendo los generadores como

$$\hat{L}_i = \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_{jk} \;\left(\Longrightarrow \hat{L}_{ij} = \epsilon_{ijk}\,\hat{L}_k\right)$$
$$\hat{K}_i = \hat{L}_{0i}, \tag{6.2.10}$$

operadores que satisfacen las reglas de conmutación

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_k,$$
$$\left[\hat{L}_i, \hat{K}_j\right] = i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{K}_k, \tag{6.2.11}$$
$$\left[\hat{K}_i, \hat{K}_j\right] = -i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{L}_k,$$

donde se ve claramente que los $\hat{L}_i$ son los generadores del subgrupo $SO(3)$ de $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Con las constantes de estructura así determinadas, es posible construir la representación adjunta de esta álgebra y, con ella, la correspondiente forma de Killing (ver Ejercicio 45). Dicha forma resulta ser regular (lo que corresponde a un álgebra semi-simple) pero no positiva definida (lo que refleja el hecho de que el grupo es no compacto). Su inversa determina el invariante cuadrático de Casimir como

$$\hat{C}_1 = \frac{1}{4}\left(\hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{K}}^2\right). \tag{6.2.12}$$

Como el álgebra es de rango 2 (nótese que, por ejemplo, $\left[\hat{L}_3, \hat{K}_3\right] = 0$), existe un segundo invariante, dado en este caso por

$$\hat{C}_2 = i\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{K}}\,, \tag{6.2.13}$$

como puede comprobarse fácilmente empleando (6.2.11).

6.3. Representaciones irreducibles (del grupo de cubrimiento) de $\mathcal{L}_+^\uparrow$

La construcción de las representaciones matriciales del grupo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ pasa entonces por encontrar conjuntos de seis matrices, $\{L_k, K_k; k = 1,2,3\}$, que satisfagan las reglas de conmutación de (6.2.11), para luego exponenciar elementos de la representación matricial del álgebra de Lie así obtenida. Esto es, exponenciar combinaciones lineales con coeficientes *reales* multiplicadas por la unidad imaginaria, de la forma $i(\alpha^k L_k + \beta^k K_k)$, con $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$.

Como hemos señalado anteriormente, esta construcción se simplifica considerando las combinaciones lineales *complejas* (elementos de la *complexificación* del álgebra

de Lie de $\mathcal{L}_+^\uparrow$) que generan un álgebra *compacta* de la misma dimensión y rango. En este caso,

$$J_k^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left(L_k \pm i K_k\right), \tag{6.3.1}$$

cuyos conmutadores se reducen a

$$\begin{gathered} \left[J_i^{(\pm)}, J_j^{(\pm)}\right] = i\epsilon_{ijk} J_k^{(\pm)}, \\ \left[J_i^{(\pm)}, J_j^{(\mp)}\right] = 0. \end{gathered} \tag{6.3.2}$$

Esto corresponde a dos subálgebras $su(2)$ que conmutan entre sí (ideales), que generan en conjunto el álgebra de Lie del grupo *semi-simple compacto* $SO(4)$[4] (ver Ejercicio 20).

Ya hemos estudiado las representaciones unitarias irreducibles del álgebra de Lie de $SU(2)$, que están caracterizadas por un *entero o semientero* j y generadas por tres matrices *autoadjuntas* $J_k^{(j)}, k = 1, 2, 3$, de dimensión $2j+1$. Podemos tomar entonces

$$\begin{aligned} J_k^{(+)} &:= J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathrm{j}_-)}, \\ J_k^{(-)} &:= \mathbf{1}^{(\mathrm{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)}, \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

las que satisfacen trivialmente (6.3.2).

De esa manera, *las representaciones matriciales irreducibles del grupo (de cubrimiento de)* $\mathcal{L}_+^\uparrow$ *están caracterizadas por un par de enteros o semienteros* (j_+, j_-), *siendo su dimensión* $(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$.

Téngase en cuenta que, mientras que las matrices que representan a los generadores $\hat{L}_k$ de $\mathcal{L}_+^\uparrow$,

$$L_k^{(j_+,j_-)} = J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathrm{j}_-)} + \mathbf{1}^{(\mathrm{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)}, \tag{6.3.4}$$

son *autoadjuntas*, las correspondientes a los $\hat{K}_k$,

$$K_k^{(j_+,j_-)} = -i\left(J_k^{(j_+)} \otimes \mathbf{1}^{(\mathrm{j}_-)} - \mathbf{1}^{(\mathrm{j}_+)} \otimes J_k^{(j_-)}\right), \tag{6.3.5}$$

son *anti - autoadjuntas*. En consecuencia, las representaciones matriciales así obtenidas *no son unitarias*.

Se puede demostrar que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ (que es un grupo de Lie no compacto) *no tiene representaciones unitarias de dimensión finita* (aparte de la representación trivial).

[4] O bien, de su grupo de cubrimiento, grupo simplemente conexo denominado $Spin(4)$.

Los invariantes de Casimir en la representación (j_+, j_-) se reducen a

$$\begin{aligned} C_1^{(j_+,j_-)} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{J}^{(j_+)^2}\otimes\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_-)}+\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_+)}\otimes\mathbf{J}^{(j_-)^2}\right)= \\ &=\frac{1}{2}\Big\{j_+\,(j_++1)+j_-\,(j_-+1)\Big\}\,\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_+)}\otimes\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_-)}\,, \\ C_2^{(j_+,j_-)} &= \left(\mathbf{J}^{(j_+)^2}\otimes\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_-)}-\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_+)}\otimes\mathbf{J}^{(j_-)^2}\right)= \\ &=\Big\{j_+\,(j_++1)-j_-\,(j_-+1)\Big\}\,\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_+)}\otimes\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_-)}\,. \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

En esas condiciones, los elementos de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ contenidos en los subgrupos Abelianos generados por cada vector en el álgebra de Lie están identificados por un conjunto de seis parámetros reales α_k, β_k, con $k = 1, 2, 3$. En la representación irreducible (j_+, j_-) tenemos

$$\begin{aligned} D^{(j_+,j_-)}(\alpha,\beta) &:= e^{i\,\left(\alpha^k L_k+\beta^k K_k\right)} = \\ &= e^{i\left((\alpha^k-i\beta^k)J_k^{(j_+)}\otimes\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_-)}+(\alpha^k+i\beta^k)\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_+)}\otimes J_k^{(j_-)}\right)} = \\ &= e^{i\left((\alpha^k-i\beta^k)J_k^{(j_+)}\otimes\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_-)}\right)}\,e^{i\left((\alpha^k+i\beta^k)\mathbf{1}^{(\mathrm{j}_+)}\otimes J_k^{(j_-)}\right)} = \\ &= e^{i(\alpha-i\beta)^k J_k^{(j_+)}}\otimes e^{i(\alpha+i\beta)^k J_k^{(j_-)}}, \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

donde se han tenido en cuenta (6.3.4) y (6.3.5) para expresar las matrices de la representación como un producto directo[5] (donde cada factor actúa sobre distintos conjuntos de índices de las componentes de los vectores del espacio producto directo). Téngase en cuenta que no se trata de un producto directo de grupos, pues ambos factores dependen de los mismos parámetros. Además resulta claro que, mientras que los parámetros α^k corresponden a *subgrupos abelianos unidimensionales compactos*, los β^k corresponden a *subgrupos abelianos unidimensionales no compactos*.

En consecuencia, los vectores de la representación irreducible (j_+, j_-) tienen componentes identificadas por un par de índices, a y $\dot{b}$, que toman $(2j_+ + 1)$ y

[5]En el último paso se ha usado la igualdad

$$e^{M\otimes\mathbf{1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,(M\otimes\mathbf{1})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,M^n\otimes\mathbf{1}=e^{M}\otimes\mathbf{1}. \tag{6.3.8}$$

$(2j_- + 1)$ valores respectivamente. Frente a transformaciones de Lorentz ellas se transforman según

$$\psi'_{a\dot{b}} = \left(e^{i(\alpha - i\beta)^k J_k^{(j_+)}}\right)_{aa'} \left(e^{i(\alpha + i\beta)^k J_k^{(j_-)}}\right)_{\dot{b}\dot{b}'} \psi_{a'\dot{b}'} \,. \tag{6.3.9}$$

Finalmente, señalemos que frente a la transformación de paridad (que cambia el signo de las coordenadas espaciales) los generadores expresados como operadores diferenciales en (6.2.6) se transforman según

$$\begin{aligned} P\hat{L}_{ij}P^{-1} &= \hat{L}_{ij}, \\ P\hat{L}_{0k}P^{-1} &= -\hat{L}_{0k}. \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

Entonces, en una dada representación matricial caracterizada por el par (j_+, j_-) tendremos un operador $\mathcal{P}$ que transforme los generadores según

$$\begin{aligned} \mathcal{P}L_k\mathcal{P}^{-1} &= L_k, \\ \mathcal{P}K_k\mathcal{P}^{-1} &= -K_k \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

y, en consecuencia,

$$\mathcal{P}D^{(j_+,j_-)}(\alpha,\beta)\mathcal{P}^{-1} = D^{(j_+,j_-)}(\alpha,-\beta) \sim D^{(j_-,j_+)}(\alpha,\beta), \tag{6.3.12}$$

resultando una representación equivalente a la (j_-, j_+).

Por lo tanto, si $j_+ \neq j_-$ la representación no es invariante frente a paridad. En ese caso, para construir representaciones invariantes (a menos de transformaciones de similitud) frente a $\mathcal{P}$ debemos considerar las sumas directas

$$\mathcal{D}^{(j_+,j_-)} = D^{(j_+,j_-)} \oplus D^{(j_-,j_+)}, \tag{6.3.13}$$

de dimensión $2(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$.

6.4. Grupo de cubrimiento de $\mathcal{L}_+^\uparrow$

El hecho de que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ contenga a $SO(3)$ es indicativo de que no se trata de un grupo simplemente conexo. Para determinar su grupo de cubrimiento, primero señalemos que es posible establecer una relación biunívoca entre los vectores del espacio de Minkowski, $\mathbf{M}_4$, y las matrices autoadjuntas de dimensión 2×2.

Una base para ese espacio de matrices (de dimensión 4) está dada por la identidad $\sigma_0 = \mathbf{1}_2$ y las matrices de Pauli $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, que tienen las propiedades

$$\mathrm{tr}\{\sigma_k\} = 0,\ \mathrm{tr}\{\mathbf{1}_2\} = 2,\ \mathrm{tr}\{\sigma_k\sigma_l\} = 2\delta_{kl}. \tag{6.4.1}$$

Ahora bien, dado $x \in \mathbf{M}_4$, podemos formar la matriz

$$\sigma(x) := x^0 \mathbf{1}_2 + x^k \sigma_k = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = \sigma(x)^\dagger. \tag{6.4.2}$$

De (6.4.1) tenemos que

$$x^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\{\sigma_\mu \, \sigma(x)\}, \tag{6.4.3}$$

mientras que el determinante de esa matriz es igual al intervalo,

$$\det \sigma(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = s^2. \tag{6.4.4}$$

Inversamente, dada una matriz autoadjunta A de dimensión 2×2, ella determina un vector en $\mathbf{M}_4$ cuyas componentes contravariantes son

$$x^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\{\sigma_\mu A\}, \tag{6.4.5}$$

pudiendo ser escrita como

$$A = x^\mu \sigma_\mu. \tag{6.4.6}$$

Las transformaciones de Lorentz son tales que preservan el intervalo s^2, de modo que corresponden a las transformaciones lineales de la matriz $\sigma(x)$ que la mantienen autoadjunta y dejan invariante su determinante. Consideremos el cambio

$$\begin{gathered} \bar{\sigma} = \Lambda \, \sigma(x) \, \Lambda^\dagger = \bar{\sigma}^\dagger, \\ \Rightarrow \det \bar{\sigma} = |\det \Lambda|^2 \det \sigma(x). \end{gathered} \tag{6.4.7}$$

Entonces, $|\det \Lambda|^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = e^{i\theta}$. Pero ese valor se debe a una fase global $e^{i\theta/2}$ en Λ que no tiene consecuencias sobre la transformación (6.4.7). De ese modo, basta con considerar matrices complejas de 2×2 cuyo determinante es $\det \Lambda = 1$.

En consecuencia, el grupo de transformaciones que debemos considerar es lo que hemos llamado $SL(2, \mathbb{C})$ y las coordenadas del vector transformado están dadas por

$$\bar{x}^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\{\sigma_\mu \, \Lambda \, \sigma(x) \, \Lambda^\dagger\}, \text{ con } \Lambda \in SL(2, \mathbb{C}). \tag{6.4.8}$$

Pero aún así, $-\mathbf{1}_2 \in SL(2, \mathbb{C})$ y

$$(-\mathbf{1}_2) \, \sigma(x) \, (-\mathbf{1}_2)^\dagger = \sigma(x), \tag{6.4.9}$$

lo que corresponde a no variar las coordenadas.

Dicho de otro modo, el par de matrices $\{+\Lambda, -\Lambda\} \subset SL(2, \mathbb{C})$ corresponden a la misma transformación de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Por lo tanto, hemos establecido un homorfismo[6] entre

[6]Evidentemente, esto se corresponde con el homomorfismo existente entre $SU(2)$ y $SO(3)$, subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$ y $\mathcal{L}_+^\uparrow$ respectivamente.

$SL(2,\mathbb{C})$ y $\mathcal{L}_+^\uparrow$, cuyo núcleo es el *centro* del primer grupo,

$$\{+\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2\} \approx \mathbb{Z}_2. \tag{6.4.10}$$

En consecuencia, $SL(2,\mathbb{C})$ (simplemente conexo) es el *grupo de cubrimiento* de $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Y éste, por ser *doblemente conexo* $\left(\Pi_1(\mathcal{L}_+^\uparrow) \approx \mathbb{Z}_2\right)$, resulta *globalmente isomorfo al grupo cociente*

$$\mathcal{L}_+^\uparrow \approx SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2. \tag{6.4.11}$$

6.5. Algebra de Lie del grupo $SL(2,\mathbb{C})$. Representaciones

Para determinar el álgebra de Lie de $SL(2,\mathbb{C})$, tengamos en cuenta que para matrices próximas de la identidad, $\Lambda \simeq \mathbf{1}_2 + A$,

$$\det \Lambda = 1 \Rightarrow \mathrm{tr}\{A\} = 0. \tag{6.5.1}$$

Como A es compleja, una base para ese espacio lineal (de dimensión $2 \times 2^2 - 2 = 6$) está dada por

$$\left\{\frac{1}{2}\,\sigma_k, -\frac{i}{2}\,\sigma_k, \text{ con } k = 1,2,3\right\}. \tag{6.5.2}$$

Naturalmente, los conmutadores de estas matrices reproducen las relaciones de (6.2.11),

$$\begin{aligned}
\left[\tfrac{1}{2}\,\sigma_i, \tfrac{1}{2}\,\sigma_j\right] &= i\,\epsilon_{ijk}\,\tfrac{1}{2}\,\sigma_k,\\[2ex]
\left[\tfrac{1}{2}\,\sigma_i, -\tfrac{i}{2}\,\sigma_j\right] &= i\,\epsilon_{ijk}\,\left(-\tfrac{i}{2}\,\sigma_k\right),\\[2ex]
\left[-\tfrac{i}{2}\,\sigma_i, -\tfrac{i}{2}\,\sigma_j\right] &= -i\,\epsilon_{ijk}\,\tfrac{1}{2}\,\sigma_k,
\end{aligned} \tag{6.5.3}$$

como corresponde a grupos localmente isomorfos. La correspondencia establecida es[7]

$$\begin{aligned}
L_k &\longleftrightarrow \tfrac{1}{2}\,\sigma_k\\[2ex]
K_k &\longleftrightarrow -\tfrac{i}{2}\,\sigma_k\,.
\end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Por exponenciación de elementos en el álgebra de Lie obtenemos las matrices

$$\Lambda(\alpha,\beta) = e^{\,i\left(\alpha^k \frac{1}{2}\,\sigma_k - \beta^k \frac{i}{2}\,\sigma_k\right)} = e^{\,i\,(\alpha - i\beta)^k\,\frac{1}{2}\,\sigma_k}. \tag{6.5.6}$$

---

[7]Nótese que (6.5.3) también admite la identificación

$$\begin{aligned}
L_k &\longleftrightarrow \tfrac{1}{2}\,\sigma_k\\[2ex]
K_k &\longleftrightarrow \tfrac{i}{2}\,\sigma_k\,.
\end{aligned} \tag{6.5.4}$$

Como $J_k^{(1/2)} = \frac{1}{2}\sigma_k$, por comparación con (6.3.7) vemos que esta *representación fundamental* del grupo $SL(2,\mathbb{C})$ coincide con la representación irreducible $(1/2,0)$.

La representación de (6.5.6) no es equivalente a su conjugada. En efecto, teniendo en cuenta que

$$\sigma_k{}^* = -\sigma_2\,\sigma_k\,\sigma_2, \tag{6.5.7}$$

vemos que la representación conjugada de $(1/2,0)$ es equivalente a la representación $(0,1/2)$ de la ec. (6.3.7) (que corresponde a la segunda representación fundamental del álgebra simple (6.3.2), de rango 2):

$$\Lambda^*(\alpha,\beta) = e^{-i\,(\alpha+i\beta)^k\,\frac{1}{2}\,\sigma_k{}^*} = \sigma_2\,e^{i\,(\alpha+i\beta)^k\,\frac{1}{2}\,\sigma_k}\sigma_2\,, \tag{6.5.8}$$

es decir,

$$\left(D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}(\alpha,\beta)\right)^* = \sigma_2 D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}(\alpha,\beta)\sigma_2\,. \tag{6.5.9}$$

Los vectores de la representación $(1/2,0)$, ψ_L, son llamados **espinores de Weyl de polarización izquierda**, mientras que los de la representación $(0,1/2)$, ψ_R, son **espinores de Weyl de polarización derecha**. Los **espinores de Dirac**[8] son vectores del espacio suma directa $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$,

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \tag{6.5.10}$$

los que, frente a transformaciones de Lorentz, cambian según

$$\Psi'_D = \begin{pmatrix} \Lambda(\alpha,\beta) & 0 \\ 0 & \sigma_2\,\Lambda^*(\alpha,\beta)\,\sigma_2 \end{pmatrix} \Psi_D. \tag{6.5.11}$$

La transformación de las coordenadas que induce (6.4.7), dada en la ecuación (6.4.8), es la que corresponde a las componentes contravariantes de un tetravector. En consecuencia, éstos se transforman como vectores de una representación equivalente a la $(1/2,1/2)$ (de dimensión $2\times 2 = 4$). En efecto,

$$V'_{a\dot{b}} = \Lambda_{aa'}\,V_{a'\dot{b}'}\,(\Lambda^\dagger)_{\dot{b}'\dot{b}} = \Lambda_{aa'}\,\Lambda^*_{\dot{b}\dot{b}'}\,V_{a'\dot{b}'}\,. \tag{6.5.12}$$

Teniendo en cuenta que $\psi_L \to \Lambda\psi_L$ con Λ dada en la Ec. (6.5.6), vemos que el producto directo

$$\psi_L \otimes \psi_L{}^\dagger \to \Lambda\psi_L \otimes \psi_L{}^\dagger\Lambda^\dagger \tag{6.5.13}$$

también se transforma como un tetravector. Sus componentes contravariantes se obtienen tomando las trazas

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\sigma_\mu\psi_L \otimes \psi_L{}^\dagger\right\} = \frac{1}{2}\,\psi_L{}^\dagger\sigma_\mu\psi_L\,. \tag{6.5.14}$$

---

[8]Paul Adrien Maurice Dirac (1902 - 1984).

Similarmnte, de la Eq. (6.5.8) se deduce que los complejos conjugados de los vectores de la representación $(0,1/2)$ se transforman según $\sigma_2{\psi_R}^* \to \Lambda\,\sigma_2{\psi_R}^*$, de modo que $\sigma_2{\psi_R}^* \otimes {\psi_R}^t\sigma_2$ también se transforma como un tetravector, y los conjugados complejos de sus componentes contravariantes resultan de tomar

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\sigma_\mu\,\sigma_2{\psi_R}^* \otimes {\psi_R}^t\sigma_2\right\}^* = \frac{1}{2}\,{\psi_R}^\dagger\sigma_2\sigma_\mu^*\sigma_2\psi_R = \frac{1}{2}\,{\psi_R}^\dagger\bar{\sigma}_\mu\psi_R\,, \tag{6.5.15}$$

donde hemos definido $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0 = \mathbf{1}_2$ y $\bar{\sigma}_k = -\sigma_k\,, k = 1,2,3.$

Para un espinor de Dirac tenemos que las expresiones

$$\begin{array}{l} {\psi_L}^\dagger\sigma_\mu\psi_L + {\psi_R}^\dagger\bar{\sigma}_\mu\psi_R = {\psi_D}^\dagger \left(\begin{array}{cc} \sigma_\mu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\sigma}_\mu \end{array}\right)\psi_D = \\ = {\psi_D}^\dagger \left(\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \bar{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & \mathbf{0} \end{array}\right)\psi_D = \overline{\psi}_D\gamma^\mu\psi_D \end{array} \tag{6.5.16}$$

se transforman como las componentes contravariantes de un tetravector, donde hemos definido las **matrices de Dirac** (en la representación de Weyl) como

$$\gamma^0 := \left(\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \end{array}\right), \quad \gamma^k := \left(\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -\sigma_k \\ \sigma_k & \mathbf{0} \end{array}\right), k = 1,2,3\,, \tag{6.5.17}$$

y el **espinor adjunto** como $\overline{\psi}_D := {\psi_D}^\dagger\gamma^0$.

A partir de las propiedades de las matrices de Pauli, resulta inmediato verificar que las matrices de Dirac satisfacen el **álgebra de Clifford**[9]

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_4\,. \tag{6.5.18}$$

El producto directo de representaciones irreducibles de $SL(2,\mathbb{C})$ se descompone como suma directa de manera consistente con la descomposición de Clebsh - Gordan de productos directos de representaciones irreducibles de $SU(2)$.

Por ejemplo, $(1/2,0)\otimes(1/2,0) = (1,0)\oplus(0,0)$. Se verifica que la representación $(1,0)$, de dimensión 3, corresponde a *tensores antisimétricos autoduales*,

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{6.5.19}$$

Bibliografía:

- H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symmétries des Particules Elémentaires.* Gordon and Breach, New York, 1967.

[9]William Kingdon Clifford (1845 - 1879).

- P. Ramond, *Field Theory: a modern primer*. Redwood City, USA: Addison, 1989.
- Pierre Ramond, *Group Theory, A Physicists Survey*, Cambridge University Press, 2010.

Apéndice A

EJERCICIOS PROPUESTOS

A.1. Teoría de Grupos - Generalidades

1. Mostrar que los siguientes conjuntos constituyen grupos respecto del producto usual entre reales:
   a) $\{-1, 1\}$
   b) $\mathbb{Q} - \{0\}$

2. Mostrar la unicidad del elemento neutro e y del inverso de todo elemento g de un grupo.

3. Dadas las permutaciones que tienen la siguiente descomposición en ciclos: $\sigma = (1\ 3\ 2)(4\ 5)$ y $\tau = (1\ 5\ 4\ 2\ 3)$, elementos de S_5, calcular
   a) σ^{-1}, τ^{-1},
   b) $\sigma\tau$, $\tau\sigma$,
   c) $(\sigma\tau)^{-1}$, $\tau^{-1}\sigma^{-1}$.

   Determinar las matrices correspondientes a todos esos elementos en la *representación regular* de S_5: $M(\sigma)$, $M(\tau)$, etc.

4. Dada la permutación $(1\ 7\ 4\ 3\ 2)(5\ 8\ 6)(9\ 10) \in S_{10}$, dar su descomposición en trasposiciones simples, determinar su paridad y el número de elementos que deja invariantes.

5. Mostrar que existe un único grupo abstracto de tres elementos, isomorfo a Z_3 (grupo abeliano de enteros con la operación de suma módulo 3). Mostrar que el conjunto de las raíces cúbicas de la unidad con el producto usual entre complejos constituye una realización de este grupo.

6. Construir la tabla de la operación correspondiente a S_3, grupo de permutaciones de tres elementos. Identificar los subgrupos propios de este grupo.

7. Dados dos grupos G y H, se define el grupo *producto directo* como $G \times H = \{(g, h)|\ g \in G,$
$h \in H\}$, con la ley de composición $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2)$.
   a) Verificar que $G \times H$ es un grupo.
   b) Mostrar que el conjunto $\widetilde{G}$ formado por elementos de la forma (g, e_H) es un subgrupo invariante $G \times H$. Idem con $\widetilde{H}$ definido como el conjunto de elementos de la forma (e_G, h).
   c) Mostrar que todo elemento de $G \times H$ puede expresarse como el producto de un elemento de $\widetilde{G}$ por otro elemento de $\widetilde{H}$, y que esos elementos son únicos.

8. Dado el conjunto de los enteros múltiplos de $n \in \mathbb{N}$, mostrar que se trata de un subgrupo invariante del grupo de los enteros $\mathbb{Z}$ (respecto de la suma usual). Construir los cosets correspondientes y mostrar que el grupo cociente es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.

A.2. Homomorfismo - Representaciones lineales

9. Mostrar que una representación fiel unidimensional del grupo de rotaciones en el plano, $SO(2) \approx U(1)$, está dada por

$$R(\varphi) = e^{i\varphi}\,, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\,.$$

   Mostrar que una aplicación $f_m : U(1) \to U(1)$ dada por $f_m(e^{i\varphi}) = e^{im\varphi}$, $m \in Z$, constituye un homomorfismo. Hallar su núcleo y decir si, para algún m, esa aplicación es un isomorfismo.

10. Considerar el grupo E_2 de desplazamientos (traslaciones y rotaciones) en el plano $\mathbb{R}^2$,

$$T(\varphi, \mathbf{a})\mathbf{x} := R(\varphi)\mathbf{x} + \mathbf{a}\,,\ \text{con } R(\varphi) \in SO(2) \text{ y } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2\,.$$

   Mostrar que las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a_1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   constituyen una representación matricial fiel de ese grupo. Mostrar que esta representación es reducible y que contiene una representación fiel del grupo

$SO(2)$ en cuyo espacio de representación las traslaciones actúan de manera trivial.

11. Dada una representación D de un grupo G, mostrar que
    a) D^*, $(D^t)^{-1}$ y $(D^\dagger)^{-1}$ también son representaciones de dicho grupo,
    b) si D es reducible, entonces D^* también lo es.
    c) Si D es unitaria, entonces D^*, $(D^t)^{-1}$ y $(D^\dagger)^{-1}$ también lo son.

12. *a*) Mostrar que el producto directo de dos representaciones de un grupo G constituye una representación matricial del mismo.
    b) Mostrar que el producto directo de representaciones unitarias es también una representación unitaria.
    c) Mostrar que los caracteres de la representación producto directo están dados por el producto de los caracteres de cada factor.

13. Determinar cuántas clases de equivalencia de representaciones irreducibles tiene el grupo S_3 así como la dimensión de cada una de ellas. Construir su tabla de caracteres empleando las relaciones de ortogonalidad.

14. Construir la tabla de caracteres del grupo S_3 empleando las relaciones derivadas del *álgebra del grupo* (Sugerencia: determinar el conjunto de coeficientes c_{ijk} para este grupo).

15. Considerar la representación de definición del grupo de permutaciones S_3 (formada por matrices de 3×3 - ver Ejemplo 3.4) y construir su vector de caracteres. Emplear las relaciones de ortogonalidad de caracteres para mostrar que ella puede descomponerse como suma directa de la representación trivial y una representación irreducible de dimensión 2×2. Determinar explícitamente esta representación bidimensional (Sugerencia: diagonalizar una matriz de la representación, $M(a)$ por ejemplo, y mostrar que una misma transformación de similitud lleva a todas las matrices a la forma diagonal en bloques). Mostrar que la representación resultante es equivalente a su conjugada (Nótese que S_3 tiene una única clase de representaciones irreducibles de dimensión 2×2).

16. La molécula de amoníaco, NH_3, está formada por tres átomos de Hidrogeno y uno de Nitrógeno. En sus posiciones de equilibrio, los átomos de Hidrógeno están dispuestos en los vértices de un triángulo equilátero, mientras que el

átomo de Nitrógeno se ubica en algún punto del eje perpendicular a ese triángulo por su centro.

a) Determinar el grupo de simetrías de esa molécula. (Sugerencia: considerar las rotaciones y reflexiones que dejan invariante la forma de la molécula.)

b) Teniendo en cuenta que el potencial al que está sometido un electrón de esa molécula (despreciando la interacción entre electrones) tiene esa misma simetría, indicar cuáles son las degeneraciones esperables de los autovalores del correspondiente Hamiltoniano. (Sugerencia: considerar la tabla de caracteres del grupo de simetrías de la molécula.)

A.3. Grupos continuos - Álgebras de Lie

17. Calcular las dimensiones de los siguientes grupos continuos: $GL(n,\mathbb{C})$, $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$ y $Sp(2n,\mathbb{R})$.

18. Determinar el álgebra de Lie de los grupos $GL(n,\mathbb{R})$ y $GL(n,\mathbb{C})$ (Sugerencia: considerar una base del espacio vectorial formado por matrices de la forma

$$E_{ij} = |e_i\rangle\langle e_j| \,, \quad \text{donde } \langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij} \,,$$

y determinar las constantes de estructura calculando los conmutadores de los generadores así definidos.)

19. Construir de manera similar los generadores de $SU(n)$ y de $SO(n)$ y determinar las correspondientes álgebras de Lie. Dar explícitamente el resultado para las álgebras de los grupos $SU(2)$, $SU(3)$, $SO(3)$ y $SO(4)$.

20. Considerar el grupo (doblemente conexo) $SO(4)$.

a) Mostrar que su álgebra de Lie (semi-simple) se descompone como suma directa de dos álgebras (simples) $su(2)$ (Sugerencia: considerar la base del álgebra de Lie formada por las matrices

$$X_1^{(\pm)} = -\tfrac{1}{2}\left(N_{23} \pm N_{14}\right) \,, \quad X_2^{(\pm)} = -\tfrac{1}{2}\left(N_{31} \pm N_{24}\right) \,,$$

$$X_3^{(\pm)} = -\tfrac{1}{2}\left(N_{12} \pm N_{34}\right) \,,$$

y calcular sus conmutadores).

b) Mostrar que, en consecuencia, $SO(4) \approx \left(SU(2) \otimes SU(2)\right)/\mathbb{Z}_2$.

21. Considerar el grupo simpléctico $Sp(2,\mathbb{R})$.

a) Mostrar que $Sp(2,\mathbb{R})$ coincide con $SL(2,\mathbb{R})$ (Por el contrario, para $n>1$, $Sp(2n,\mathbb{R})$ es un subgrupo propio de $SL(2n,\mathbb{R})$).

b) Teniendo en cuenta que $\det M = 1 \Rightarrow \operatorname{tr}\log M = 0$, mostrar que si $M = e^A \in Sp(2,\mathbb{R})$ (o $SL(2,\mathbb{R})$), entonces

$$M = \cosh\alpha \mathbf{1}_2 + \frac{\sinh\alpha}{\alpha} A\,, \quad \text{con} \quad \alpha = \sqrt{-\det A}\,.$$

c) Tomando valores pequeños para los elementos de matriz de A, mostrar que los generadores de este grupo pueden ser elegidos como

$$\{-i\sigma_3, -i\sigma_+, -i\sigma_-\}\ .$$

Calcular las correspondientes constantes de estructura.

22. Determinar la dimensión del álgebra de Lie del grupo $Sp(n)$ definido como la intersección $Sp(n) = U(2n) \cap Sp(2n,\mathbb{C})$.

23. Considerar dos pares de variables canónicas conjugadas, $x_i, p_i, i = 1,2$. Ellas satisfacen las relaciones de conmutación

$$[x_i, x_j] = 0\,, \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}\,, \quad [p_i, p_j] = 0\,.$$

Mostrar que la matriz U que realiza una transformación canónica (lineal) a otros dos pares de variables, $X_i, P_i, i = 1,2$, es un elemento de $Sp(4,\mathbb{R})$. Para ello definir

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \xi = U\eta$$

y calcular la matriz cuyos elementos están dados por los conmutadores de las variables canónicas,

$$G := \frac{1}{i\hbar}\left([\xi_i, \xi_j]\right)\ .$$

Finalmente, mostrar que $UGU^t = G$ y que $U^tGU = G$.

24. Se define la *forma de Killing* de un álgebra de Lie como la matriz real simétrica cuyos elementos están dados por

$$g_{\mu\nu} = \operatorname{tr}\{M_\mu\, M_\nu\} = -\,\mathbf{C}_{\mu\alpha}{}^{\beta}\,\mathbf{C}_{\nu\beta}{}^{\alpha} = g_{\nu\mu}\,,$$

donde las matrices M_μ son los generadores en la representación adjunta, $(M_\mu)_\nu{}^\rho := i\,\mathbf{C}_{\mu\nu}{}^\rho$.

Mostrar que las constantes definidas por

$$\mathbf{C}_{\mu\nu\lambda} := \mathbf{C}_{\mu\nu}{}^{\rho}\, g_{\rho\lambda} = -\,\mathbf{C}_{\mu\nu}{}^{\rho}\,\mathbf{C}_{\rho\alpha}{}^{\beta}\,\mathbf{C}_{\lambda\beta}{}^{\alpha}$$

son totalmente antisimétricas en sus tres índices. (Sugerencia: emplear las identidades de Bianchi).

25. Mostrar que la forma de Killing para los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ (con la elección de generadores de la Sección 5.2) está dada por $g_{ij} = 2\delta_{ij}$.

26. Se puede demostrar que un álgebra de Lie es *semi-simple* (es decir, es un álgebra que corresponde a un grupo de Lie que no contiene subgrupos de Lie invariantes que sean Abelianos) si y sólo si su forma de Killing es regular (es decir, si $\det g \neq 0$). En ese caso, su inversa existe y satisface $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\ \nu}$.

    Mostrar que, en esas condiciones, el *invariante cuadrático fundamental* de Casimir, dado por

$$K = g^{\mu\nu}\, X_\mu\, X_\nu, \tag{A.3.1}$$

    donde $g^{\mu\nu}$ es la inversa de la forma de Killing, conmuta con los generadores.

27. Dado que la forma de Killing de grupos de Lie simples compactos es positiva definida, mostrar que sus constantes de estructura pueden ser elegidas de modo que sean completamente antisimétricas.

28. Determinar el álgebra de Lie del grupo $SO(1,2)$.

    a) Mostrar que los generadores pueden ser elegidos como

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Determinar las correspondientes constantes de estructura y construir la representación adjunta del álgebra.

    b) Construir la forma de Killing y mostrar que el grupo $SO(1,2)$ es simple y no compacto (Recordar que un grupo de Lie simple es compacto si y sólo si su forma de Killing es positiva definida).

    c) Redefinir la base de generadores como

$$D := -2X_3\,, \quad K := (X_1 - X_2)\,, \quad H := (X_1 + X_2)\,,$$

    y determinar las correspondientes constantes de estructura.

29. El generador de las transformaciones de escala (dilataciones) en Mecánica Cuántica se define como el operador diferencial

$$\hat{D} := -\frac{1}{2}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) \,,$$

donde los operadores posición y momento, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$, satisfacen las relaciones de conmutación $[p_k, x_l] = -i\delta_{kl}$ (tomando $\hbar = 1$). En efecto,

$$\left[\hat{D}, x_k\right] = i\,x_k \,, \quad \left[\hat{D}, p_k\right] = -i\,p_k \,,$$

donde las coordenadas se transforman como magnitudes de *dimensión 1* (longitud) y los momentos según la dimensión opuesta (inversa de longitud).

Introducimos dos magnitudes, $\hat{K} := \mathbf{x}^2/2$ y $\hat{H} := \mathbf{p}^2/2$, con dimensión 2 y -2 respectivamente,

$$\left[\hat{D}, \hat{K}\right] = 2i\hat{K} \,, \quad \left[\hat{D}, \hat{H}\right] = -2i\hat{H} \,,$$

cuyo conmutador es

$$\left[\hat{H}, \hat{K}\right] = i\hat{D} \,.$$

a) Mostrar que esos tres operadores generan un álgebra isomorfa a $so(1,2)$ (Sugerencia: comparar con los resultados del problema 28*c*).

b) Tomando a $\hat{H}$ como el Hamiltoniano de una partícula libre, mostrar que los siguientes operadores con dependencia explícita del tiempo t,

$$\hat{H}(t) = \hat{H} \,, \quad \hat{D}(t) = \hat{D} + 2t\hat{H} \,, \quad \hat{K}(t) = \hat{K} + t\hat{D} + t^2\hat{H} \,,$$

satisfacen en todo instante el **álgebra conforme** del grupo $SO(1,2)$,

$$\left[\hat{D}(t), \hat{K}(t)\right] = 2i\hat{K}(t) \,,$$

$$\left[\hat{D}(t), \hat{H}(t)\right] = -2i\hat{H}(t) \,,$$

$$\left[\hat{H}(t), \hat{K}(t)\right] = i\hat{D}(t) \,.$$

c) Teniendo en cuenta que, en el esquema de Heisenberg, la *derivada total* de un operador respecto del tiempo está dada por

$$\dot{\mathcal{O}}(t) = i\left[\hat{H}, \mathcal{O}(t)\right] + \partial_t\mathcal{O}(t) \,,$$

mostrar que los operadores $\hat{H}(t)$, $\hat{K}(t)$ y $\hat{D}(t)$ son *constantes de movimiento.*

30. Considerar el álgebra de Lie del grupo $SU(3)$. Definir los generadores en términos de las matrices de Gell-Mann como $T_k = \lambda_k/2$.

a) Calcular las correspondientes constantes de estructura. Mostrar que resultan completamente antisimétricas y que el rango del álgebra es $r = 2$.
b) Construir los generadores en la representación adjunta y determinar la forma de Killing. Mostrar que es regular (el grupo es simple).
c) Calcular el operador de Casimir en las representaciones fundamental y adjunta.
d) Llevar el álgebra a la forma normal de Cartan: determinar la subálgebra de Cartan y las correspondientes raíces (vectores de un espacio euclídeo bidimensional).

31. Mostrar que las medidas de integración invariantes a izquierda y derecha del grupo de Heisenberg real (ver Ejemplo 5.2), cuyos elementos son de la forma

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad a,b,c \in \mathbb{R}\,, \tag{A.3.2}$$

coinciden (a pesar de que se trata de un grupo no compacto) y están dadas por $d\mu = da\,db\,dc$.

32. Determinar la medida invariante del grupo $SU(2)$ a partir de su representación fundamental. Calcular su volumen invariante (Sugerencia: ver Sección 5.5).

A.4. Representaciones irreducibles de $SU(2)$ y $SO(3)$ - Aplicaciones

33. Construir las representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$ correspondientes a $j = 1$ y $j = 3/2$. Determinar la dimensión de cada representación y calcular explícitamente las matrices correspondientes a los generadores J^2, J_1, J_2, J_3, J_+ y J_-.

    Dado el homomorfismo que liga los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$, determina si alguna de esas representaciones es una representación ordinaria de $SO(3)$.

34. A partir de sus constantes de estructura, construir la representación adjunta de $SU(2)$ y mostrar que es equivalente a la representación $j = 1$.

35. Determinar la *función de caracteres* correspondiente a la representación irreducible j de $SU(2)$ (Sugerencia: ver Sección 5.6). Empleando la medida invariante en ese grupo, mostrar que esos vectores son ortogonales entre sí y de norma no nula.

36. Determinar el vector de caracteres de la representación producto directo $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$ y calcular cuántas veces está en ella contenida la representación irreducible $D^{(j)}$.

37. Determinar los coeficientes de Clebsh-Gordan para la descomposición del producto directo $D^{(1/2)} \otimes D^{(1)}$ como suma directa de representaciones irreducibles.

38. Considerar un oscilador armónico isótropo en el plano, descrito por el Hamiltoniano (tomamos $\hbar\omega = 1$)

$$H = \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1\right) .$$

donde los operadores de *creación* y *destrucción* están definidos como

$$a_j^\dagger := \frac{Q_j - iP_j}{\sqrt{2}}\,, \quad a_j := \frac{Q_j + iP_j}{\sqrt{2}}\,,$$

con $j = 1, 2$, operadores que satisfacen $\left[a_j^\dagger, a_k\right] = -\delta_{jk}$.

Definiendo nuevos operadores de creación y destrucción como

$$a := \frac{a_1 + ia_2}{\sqrt{2}}\,, \quad b := \frac{a_1 - ia_2}{\sqrt{2}}\,, \quad a^\dagger = \frac{a_1^\dagger - ia_2^\dagger}{\sqrt{2}}\,, \quad b^\dagger = \frac{a_1^\dagger + ia_2^\dagger}{\sqrt{2}}\,,$$

se tiene que

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1 = \left[b, b^\dagger\right]\,, \quad [a, b] = 0 = \left[a, b^\dagger\right]\,,$$

y, para el Hamiltoniano y el momento angular,

$$H = \left(a^\dagger a + b^\dagger b + 1\right)\,, \quad L = \left(b^\dagger b - a^\dagger a\right)\,.$$

Definiendo ahora

$$J_3 := -\frac{1}{2} L = \frac{N_a - N_b}{2}\,, \quad J_+ := a^\dagger b\,, \quad J_- := {J_+}^\dagger = b^\dagger a\,,$$

mostrar:

a) que estos operadores generan un álgebra $su(2)$,

b) que el operador cuadrático de Casimir de esa álgebra es $\mathbf{J}^2 = \left(H^2 - 1\right)/4$,

c) que los subespacios característicos de H, correspondientes a autovalores $(n_a + n_b + 1) = n + 1$, son espacios de representación de esa álgebra correspondientes a

$$j := \frac{n}{2} = \frac{n_a + n_b}{2},$$

$$\text{con} \quad m := \frac{n_a - n_b}{2} = -j, -j+1, \cdots, j-1, j\,.$$

39. Considerar el Hamiltoniano del átomo de Hidrógeno,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r},$$

donde $r = \sqrt{\mathbf{x}^2}$. H resulta invariante frente a rotaciones, generadas en $\mathbf{L}_2\left(\mathbb{R}^3\right)$ por las componentes del *momento angular* de la partícula, $\mathbf{L} := \mathbf{x} \times \mathbf{p}$, operadores que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k\,, \quad [H, \mathbf{L}] = 0\,.$$

El **vector de Runge y Lenz**, definido como

$$\mathbf{A} := \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{L}\right) + me^2\,\frac{\mathbf{x}}{r},$$

es una *constante de movimiento* dado que también conmuta con H,

$$[H, \mathbf{A}] = 0\,,$$

como puede verificarse fácilmente. Por ser una magnitud vectorial, se transforma como vector frente a rotaciones en el espacio, lo que equivale a decir que

$$[L_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k\,.$$

Mediante un (tedioso) cálculo directo puede verificarse que también se satisfacen las siguientes relaciones

$$[A_i, A_j] = -i\epsilon_{ijk}\,L_k\,2mH\,,$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = 0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}\,, \quad \mathbf{A}^2 = 2mH\left(\mathbf{L}^2 + 1\right) + m^2e^4\,.$$

Nótese que el segundo miembro de la primera ecuación no es lineal en los operadores $\{\mathbf{L}, \mathbf{A}, H\}$ sino *cuadrático*, de modo que ese conjunto de operadores no generan un álgebra de Lie (con H incorporado como extensión central).

No obstante, los subespacios característicos del Hamiltoniano son espacios de representación del álgebra generada por $\{\mathbf{L}, \mathbf{A}\}$. En efecto, en el subespacio correspondiente al autovalor E tenemos

$$[A_i, A_j] = -2mE\, i\epsilon_{ijk}\, L_k\,.$$

En particular, si consideramos *estados ligados*, con $E = -|E| < 0$, y definimos $\mathbf{K} := \mathbf{A}/\sqrt{2m|E|}$ obtenemos el álgebra

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k\,, \quad [L_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k\,, \quad [K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}\, L_k\,.$$

a) Mostrar que esa álgebra es isomorfa a $so(4)$ (ver problema 20). Para ello definir $\mathbf{M} := (\mathbf{L} + \mathbf{K})/2$ y $\mathbf{N} := (\mathbf{L} - \mathbf{K})/2$ y mostrar que

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k\,, \quad [N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk} N_k\,, \quad [M_i, N_j] = 0\,.$$

b) Mostrar que los invariantes cuadráticos de Casimir de esta álgebra (de rango 2) coinciden en cada subespacio característico de H y están dados por

$$4\mathbf{M}^2 = 4\mathbf{N}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{K}^2 = \left\{-1 + \frac{me^4}{2|E|}\right\} \mathbf{1} = 4j(j+1)\,\mathbf{1}\,, \qquad \text{(A.4.1)}$$

donde

$$\mathbf{K}^2 = -\left(\mathbf{L}^2 + 1\right) + \frac{me^4}{2|E|}$$

y j es un entero o semientero, $j = \frac{k}{2}\,, k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$.

En consecuencia, los generadores tienen la representación

$$M_k^{(j)} = J_k^{(j)} \otimes \mathbf{1}_{2j+1}\,, \quad N_k^{(j)} = \mathbf{1}_{2j+1} \otimes J_k^{(j)}\,,$$

donde los $J_k^{(j)}$ son los generadores de $SU(2)$ en la representación (unitaria) irreducible $D^{(j)}\,(SU(2))$.

c) En esas condiciones, existe una *simetría accidental* responsable de una degeneración de las autoenergías mayor que la que surge de la invariancia rotacional del Hamiltoniano, cuyas representaciones irreducibles son de la forma $D^{(j)}\,(SU(2)) \otimes D^{(j)}\,(SU(2))$ y que resulta suficientemente vinculante como para determinar completamente esos autovalores.

En efecto, mostrar que de la ec. (A.4.1) se obtiene la serie de Balmer,

$$E_n = -\frac{me^4}{2\,n^2}\,, \quad n = 2j + 1 = 1, 2, 3, \cdots\,,$$

con una degeneración $n^2 = (2j + 1) \times (2j + 1)$.

Puede construirse una base del espacio de representación con los autovectores de M_3 y N_3, los que están identificados por los correspondientes autovalores, m_3 y n_3 respectivamente,

$$\{|j, m_3, n_3\rangle := |j, m_3\rangle \otimes |j, n_3\rangle\,,\ -j \leq m_3, n_3 \leq j\}\ .$$

d) Teniendo en cuenta que $\mathbf{L} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$, y dada la estructura de producto directo de representaciones irreducibles de $SU(2)$ que presentan los subespacios característicos del Hamiltoniano, mostrar que las representaciones irreducibles de $SO(3)$ contenidas en cada uno de esos subespacios corresponden a $l = 0, 1, 2, \cdots, 2j = n - 1$ (una vez cada una). Verificar que la suma de sus dimensiones coincide con la degeneración del autovalor, $n^2 = (2j+1)^2$. En particular, notar que los autovalores de operador L_3, $l_3 = m_3 + n_3$, son enteros.

40. Los generadores del grupo de rotaciones están realizados en el espacio de Hilbert de una partícula de Schrödinger, $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$, por las componentes del operador momento angular $\mathbf{L} := \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. Con $\mathbf{p} = -i\nabla$, y referido a un sistema de coordenadas esféricas, mostrar que

a)

$$\mathbf{L}^2 = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,, \quad L_3 = -i\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\,,$$

b) los autovectores simultáneos de $\mathbf{L}^2$ y L_3 son los *armónicos esféricos*, dados por

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}\,,$$

correspondientes a los autovalores $l(l+1)$ y m respectivamente, donde los $P_l^m(x)$ son los *polinomios asociados de Legendre*,

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l\ .$$

c) los armónicos esféricos están normalizados de modo que

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_l^m(\theta,\varphi)^* Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi)\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\ .$$

A.5. Clasificación y representación de álgebras simples

41. Considerar el álgebra simple A_2, correspondiente al grupo $SU(3)$. Una posible elección para los generadores T_k, $k = 1, 2, \cdots, 8$, ha sido dada en el Ejemplo 5.3 de la página 113.

a) Comprobar que $\mathrm{Tr}\{T_i\} = 0$ y $\mathrm{Tr}\{T_i T_j\} = \frac{1}{2}\,\delta_{ij}$.

b) Calcular las correspondientes constantes de estructura.

c) Construir los generadores en la representación adjunta y con ellos la forma de Killing. Mostrar que $g = 3 \times \mathbf{1}_8$, regular y positiva definida, lo que corresponde a un grupo simple compacto.

d) Mostrar que el invariante cuadrático de Casimir en la representación de definición es $\frac{4}{9}\,\mathbf{1}_3$ y en la representación adjunta es $\mathbf{1}_8$.

e) Construir la base estándar de Cartan adoptando a $H_1 = T_3$ y $H_2 = T_8$ como generadores de la subálgebra de Cartan y a

$$E_1^{\pm} = \frac{T_6 \mp iT_7}{\sqrt{6}}, \quad E_2^{\pm} = \frac{T_4 \pm iT_5}{\sqrt{6}}, \quad E_3^{\pm} = \frac{T_1 \pm iT_2}{\sqrt{6}},$$

como *operadores escalera*. Determinar las correspondientes raíces e identificar a las raíces simples. Mostrar que ellas son

$$\alpha^{(1)} = \frac{1}{2}\left(1, -\sqrt{3}\right)^t \quad < \quad \alpha^{(2)} = \frac{1}{2}\left(1, \sqrt{3}\right)^t .$$

f) Mostrar que existe otra raíz positiva, $\bar{\alpha}^{(3)} = \bar{\alpha}^{(1)} + \bar{\alpha}^{(2)}$, que las restantes raíces no nulas pueden obtenerse mediante las transformaciones del grupo de Weyl, $\beta \to \beta - 2\frac{(\beta\cdot\alpha)}{(\alpha\cdot\alpha)}\,\alpha\,, \forall\bar{\alpha}, \bar{\beta}$, y que todas ellas tienen la misma longitud (respecto de la métrica inducida por la forma de Killing: $(\bar{\alpha}\cdot\bar{\alpha}) = \alpha_i g^{ij}\alpha_j$).

g) Determinar los pesos fundamentales, vectores que forman la base dual de la base no ortogonal de $\mathbb{R}^2$ provista por las raíces simples y que satisfacen $\left(m^{(k)}\cdot\alpha^{(l)}\right) = \frac{1}{2}\,\delta^{kl}$, con $k, l = 1, 2$.

h) Determinar la expresión de los generadores de la base estándar de Cartan en la representación adjunta y verificar que las únicas componentes no nulas de la correspondiente forma de Killing son

$$g_{\bar{\alpha}_k,-\bar{\alpha}_k} = g_{-\bar{\alpha}_k,\bar{\alpha}_k} = 1\,, \quad g_{ij} = 2\sum_{k=1}^{3}\bar{\alpha}_i^{(k)}\bar{\alpha}_j^{(k)} = 3\delta_{ij}\,,\ i, j = 1, 2.$$

i) verificar que se satisfacen las relaciones

$$\left[E_k^{+}, E_k^{-}\right] = \bar{\alpha}_i^{(k)} g^{ij} H_j\,, \quad \left[E_1^{+}, E_2^{+}\right] \sim E_3^{+}\,,\ \text{etc.}$$

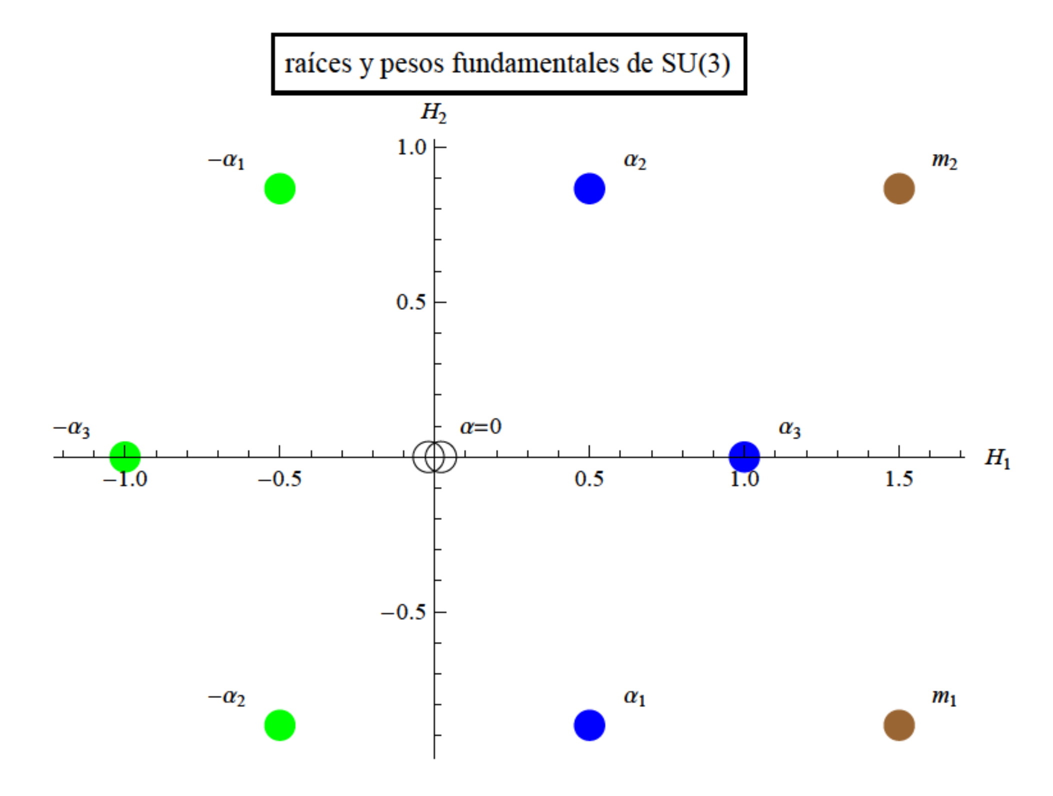


FIGURA 1. Diagramas de raíces y pesos fundamentales del álgebra A_2 ($SU(3)$).

j) Los pesos máximos (no degenerados) de las representaciones irreducibles de $SU(3)$, $D^{(l_1,l_2)}$, son de la forma $M = l_1 m_1 + l_2 m_2$, con $l_i \in \mathbb{Z}_+$. Construir el *diagrama de pesos* de las representaciones fundamentales, $D^{(1,0)}$ y $D^{(0,1)}$, y de la representación adjunta $D^{(1,1)}$. Téngase en cuenta que la dimensión de la representación irreducible $D^{(l_1,l_2)}$ está dada por la **fórmula de Weyl**, $d = (l_1+1)\,(l_2+1)\left(\frac{l_1+l_2}{2}+1\right)$, y que las operaciones del grupo de Weyl no permiten obtener los pesos nulos a partir del peso máximo.

Ver figura 1.

A.6. El grupo de Lorentz

42. Determinar la ley de composición correspondiente al grupo cociente entre el grupo de Lorentz y su subgrupo propio ortócrono, $O(1,3)/\mathcal{L}_+^\uparrow$.

43. Mostrar que $\mathcal{L}_+^\uparrow$ es no compacto (Sugerencia: considerar los *boosts*). ¿Cabe esperar que este grupo tenga representaciones matriciales unitarias?

44. Determinar el álgebra de Lie del grupo $SO(1,3)$ (Sugerencia: considerar el espacio de las matrices de 4×4 reales y antisimétricas). ¿Qué dimensión tiene esa álgebra?

Mostrar que los generadores pueden elegirse como

$$L_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y que esas matrices satisfacen las relaciones de conmutación de la Ec. 6.2.11.

45. Construir la representación adjunta del grupo $SO(1,3)$. Mostrar que la forma de Killing es regular (lo que corresponde a un álgebra semi-simple) pero no positiva definida (lo que refleja el hecho de que el grupo es no compacto). Mostrar que esa representación adjunta corresponde a la representación irreducible $(j_+ = 1, j_- = 1)$ (Sugerencia: Construir las matrices correspondientes a las combinaciones $J_k^{(\pm)}$ y con ellas los correspondientes invariantes cuadráticos de Casimir).

46. Mostrar que los operadores diferenciales (definidos sobre funciones suaves de las coordenadas del espacio-tiempo) $\hat{L}_{\alpha\beta} := -i\left(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha\right)$, con $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, generan un álgebra isomorfa a la del grupo $SO(1,3)$.

47. Mostrar que existe una correspondencia biunívoca entre el espacio de Minkowski M_4 y el espacio de las matrices autoadjuntas de 2×2. Dar la expresión del *intervalo* s^2 en esta segunda representación y determinar el grupo de transformaciones lineales que lo dejan invariante. Mostrar que existe un homomorfismo entre este grupo y $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

48. Determinar el álgebra de Lie del grupo $SL(2,\mathbb{C})$. Mostrar que es de rango 2 y decir cuántas representaciones fundamentales tiene esa álgebra.

49. Identificar una representación fundamental de $SL(2,\mathbb{C})$ (determinar que par (j_+, j_-) le corresponde). Mostrar que su conjugada es no equivalente a dicha representación fundamental.

50. Mostrar que un tetravector se transforma como vector de una representación irreducible de $SL(2,\mathbb{C})$ equivalente a la representación $(1/2, 1/2)$. (Sugerencia: ver Ejercicio 47).

51. Verificar que las matrices de Dirac (definidas en (6.5.17)) satisfacen el álgebra de Clifford
$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_4\,.$$

52. Considerar el grupo $O(1,2)$, grupo de isometrías de un espacio pseudo-euclídeo de signatura $(1,3)$ (grupo de *Lorentz* en un espacio de *Minkowski* $\mathbf{M}_3$, con métrica $g = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1)$).
    a) Mostrar que se trata de un grupo no conexo, no compacto de dimensión 3. (Ver Ejercicio 28).
    b) Mostrar que el espacio $\mathbf{M}_3$ puede ser representado como un espacio de matrices reales simétricas de 2×2, que puede ser generado por las matrices $\{\mathbf{1}_2, \sigma_3, \sigma_1\}$, mediante la relación
    $$\sigma(\mathbf{x}) := x^0\mathbf{1}_2 + x^1\sigma_3 + x^2\sigma_1 = \begin{pmatrix} x^0+x^1 & x^2 \\ x^2 & x^0-x^1 \end{pmatrix} = \sigma(\mathbf{x})^t\,,$$
    de modo que el *intervalo* s^2 está dado por
    $$s^2 = \left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 = \det\sigma(\mathbf{x})\,.$$
    c) Mostrar que el subgrupo conexo invariante $SO(1,2)$ es homomorfo[1] a $SL(2,\mathbb{R})$ (Ver Ejemplo 5.1 en pag. 100 y Sección 6.4).
    d) Mostrar que los elementos de $SL(2,\mathbb{R})$, escritos como $\Lambda = e^{iA}$ con iA real y de traza nula, pueden ser generados por $\left\{X_0 := -\frac{1}{2}\sigma_2, X_1 := \frac{i}{2}\sigma_1, X_2 := \frac{i}{2}\sigma_3\right\}$ y determinar las correspondientes constantes de estructura.

[1] El grupo de cubrimiento de $SL(2,\mathbb{R})$, $\overline{SL(2,\mathbb{R})}$, es un ejemplo de grupo de Lie de dimensión finita que no admite representaciones matriciales *fieles*, es decir, no es un grupo de matrices.

e) Determinar la forma de Killing y mostrar que el invariante cuadrático de Casimir está dado por

$$\mathbf{X}^2 := {X_0}^2 - {X_1}^2 - {X_2}^2 \,.$$

f) Considerar la complexificación de esta álgebra de Lie y mostrar que está asociada a la misma álgebra simple compacta que el álgebra del grupo $SU(2)$ (A_1 en la clasificación de Cartan - Ver Sección 5.8). (Sugerencia: considerar las combinaciones complejas $J_3 = X_0$, $J_2 = iX_1$ y $J_1 = -iX_2$).

g) A partir de las representaciones (unitarias) irreducibles de $SU(2)$, construir por *prolongación analítica* las representaciones matriciales irreducibles (no unitarias) de $SL(2,\mathbb{R})$.

h) Como $SL(2,\mathbb{R})$ es no compacto, sus representaciones unitarias no son de dimensión finita. Ellas están generadas por *operadores hermíticos* $\hat{X}_\mu = \hat{X}_\mu^\dagger$, con $\mu = 0, 1, 2$, definidos sobre un espacio *euclídeo* y que satisfacen el álgebra de Lie del grupo. Mostrar que, en términos de $\hat{X}_\pm := \hat{X}_1 \pm \imath \hat{X}_2$, esas relaciones se escriben como

$$\left[\hat{X}_0, \hat{X}_\pm\right] = \pm \hat{X}_\pm \,, \quad \left[\hat{X}_+, \hat{X}_-\right] = -2\hat{X}_0 \,.$$

i) Construir las representaciones unitarias irreducibles de $SL(2,\mathbb{R})$ en términos de los autovectores simultáneos de $\hat{\mathbf{X}}^2$ y $\hat{X}_0$,

$$\hat{\mathbf{X}}^2 \, |\lambda, m\rangle = \lambda \, |\lambda, m\rangle \ , \quad \hat{X}_0 \, |\lambda, m\rangle = m \, |\lambda, m\rangle \ .$$

Mostrar que la positividad del producto escalar requiere que $\left(m \mp \frac{1}{2}\right)^2 \geq \lambda + \frac{1}{4}$ (Sugerencia: operar por similitud con la correspondiente construcción para el grupo $SU(2)$).

j) Como $\hat{X}_0$ genera rotaciones en un plano, podemos suponer que sus autovalores m son enteros o semi-enteros. Dado que $\lambda := k(k-1)$ no tiene signo definido, deben considerarse dos casos,

1) $\lambda + \frac{1}{4} \geq 0$: mostrar que en este caso $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$ y, para cada valor de k, $m = k, k+1, k+2, \cdots$ o bien $m = -k, -(k+1), -(k+2), \cdots$

2) $\lambda + \frac{1}{4} < 0$: en este caso $k = \frac{1}{2} + i\gamma$ con $\gamma \in \mathbb{R}$ no nulo y $\lambda + \frac{1}{4} = -\gamma^2$. Mostrar que m puede entonces tomar todos los valores enteros o todos los semi-enteros.

Índice alfabético

Bibliografía

[1] H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symmétries des Particules Elémentaires.* Gordon and Breach, New York, 1967.

[2] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications.* John Wiley & Sons, New York, 1974.

[3] Brian C. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*, Springer, 2003.

[4] M. Hammermesh, *Group Theory and its Applications to Physical Problems.* Courier Dover Publications, 1989.

[5] E. Wigner, *Group theory: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra.* Academic Press, New York, 1959.

[6] Hermann Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Courier Dover Publications, 1950.

[7] J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Academic Press, 1984.

[8] Pierre Ramond, *Group Theory, A Physicists Survey*, Cambridge University Press, 2010.

[9] P. Ramond, *Field Theory: a modern primer.* Redwood City, USA: Addison, 1989.

[10] Andrew Baker, Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory, Springer-Verlag London Limited, 2002.

[11] Robert D. Richtmyer, *Principles of advanced mathematical physics*, Vol. II. New York-Heidelberg-Berlin: Springer, 1981.

Libros de Cátedra

Falomir, Horacio
Curso de Métodos de la Física Matemática : Introducción a la teoría de grupos / Horacio Falomir. - 1a ed. adaptada. - La Plata : Universidad Nacional de La Plata, 2015.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-34-1245-9

1. Matemática. I. Título.
CDD 510

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
47 N.° 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2015
ISBN 978-950-34-1245-9



FACULTAD DE
CIENCIAS EXACTAS



